

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
«ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА
ШЕВЧЕНКА»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій

Кафедра математики та інформатики

Камінський Сергій Іванович

ВІЛЬНІ МОНОГЕННІ УЗАГАЛЬНЕНІ ДІГРУПИ

кваліфікаційна робота

здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня

освітньої програми «Алгебра та теорія чисел»

за спеціальністю 111 Математика

Особистий підпис _____ Сергій КАМІНСЬКИЙ

Науковий керівник _____ Анатолій ЖУЧОК,
проректор з науково-педагогічної роботи,
доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри математики та
інформатики

В.о. завідувача кафедри _____ Юрій КОЗУБ,
доктор технічних наук, професор
кафедри математики
та інформатики

Полтава – 2024

ЗМІСТ

<i>ВСТУП</i>	3
<i>РОЗДІЛ 1 АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ</i>	5
1.1. Історія розвитку алгебраїчних структур	5
1.2. Алгебраїчні структури	10
1.2.1. Бінарна операція.....	10
1.2.2. Група.....	12
1.2.3. Морфізми груп	14
1.2.4. Кільце	15
1.2.5. Поле	18
Висновки до розділу 1	19
<i>РОЗДІЛ 2 ДІМОНОЇДИ ТА ДІГРУПИ</i>	20
2.1. Дімоноїди	20
2.1.1. Загальні визначення.....	20
2.1.2. Незалежність аксіом дімоноїда	26
2.1.3. Аналог теореми Келі.....	27
2.1.4. Найменша сепаративна конгруенція.....	31
2.1.5. Вільні дімоноїди.....	34
2.2. Дігрупи	39
2.2.1. Аксіоми дігрупи	39
2.2.2. Вільна абелева моногенна дігрупа	40
2.2.3. Ендоморфізми вільної абелевої дігрупи рангу 1.	43
2.2.4. Вільні моногенні узагальнені дігрупи	49
Висновки до розділу 2	52
ВИСНОВКИ.....	54
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	56

ВСТУП

Актуальність теми. Дане дослідження є спробою систематичного дослідження вільних моногенних узагальнених дігруп. Узагальнені дігрупи є відносно новою структурою алгебри, яка дозволяє визначити дві бінарні операції на множині з двома нейтральними елементами.

У цій роботі представлено узагальнення концепції вільних груп на узагальнені дігрупи, що раніше розглядалося у літературі. Дослідження вільних моногенних узагальнених дігруп робить внесок у розвиток абстрактної алгебри та теорії груп. Це збагачує наше розуміння алгебраїчних структур та дає нові інструменти для вирішення абстрактних математичних проблем. Вільні моногенні узагальнені дігрупи можуть надати нові структури алгебри. Таким чином дана робота є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Кваліфікаційна робота виконувалась на кафедрі алгебри та системного аналізу Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження властивостей та структури вільних моногенних узагальнених дігруп та їх можливого використання у математиці.

Для досягнення цієї мети були поставлені наступні задачі для вирішення:

- дослідити існуючі алгебраїчні структури;
- розглянути математичні визначення та конструкції для вільних моногенних узагальнених дігруп, включаючи правила, операцій та властивості;
- провести аналіз структурних властивостей вільних моногенних узагальнених дігруп;
- проаналізувати вільні моногенні узагальнені дігрупи порівняно з іншими структурами алгебри.

Об'єктом дослідження є вільні моногенні узагальнені дігрупи як абстрактні структури алгебри. та їх математичні властивості.

Предметом дослідження є структура та математичні властивості вільних узагальнених дігруп.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовувались такі методи: методи аналізу літератури (для дослідження існуючих алгебраїчних структур); методи конструювання (для формулювання визначень вільних моногенних узагальнених дігруп); методи порівняння (для порівняння вільних моногенних узагальнених дігруп з іншими абстрактними структурами алгебри) та інші методи наукового пізнання.

Ключові слова: алгебраїчна структура, група, узагальнена дігрупа, дімоноїд, вільна моногенна дігрупа.

РОЗДІЛ 1

АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ

1.1. Історія розвитку алгебраїчних структур

Розвиток алгебри починається з моменту, як тільки люди почали рахувати, тому що вже тоді використовувалися основні властивості операцій – комутативність додавання та множення.

В античному світі (III століття до н.е. – V століття н.е.) математика була орієнтована на геометрію та арифметику [3]. У роботах Евкліда, Діофанта дослідження кожен крок пояснюється логічним доказом і арифметичні чи алгебраїчні питання перекладалися на мову геометрії: величини трактувалися як довжини, твори двох величин – як площа прямокутника тощо [2].

Перші кроки до абстракції алгебри були зроблені в Давньому Єгипті і Вавилоні, де розроблялися методи вирішення алгебраїчних рівнянь. Однак алгебра як самостійна математична дисципліна більш активно в Середні віки (VIII-XII століття) розвивається в арабському світі. Арабський математик Аль-Хорезмі зробив великий внесок у розвиток алгебри, так його математичний трактат «Кітаб аль джебр ва-аль-Мукабала» (Книга про відновлення та рівняння) вважається однією з перших робіт, присвячених вирішенню рівнянь алгебри, і в цій роботі вперше зустрічається слово «алгебра» [6].

Математики середньовічного Сходу всі дії висловлювали словами. Подальший прогрес алгебри став можливим лише після появи у загальному вживанні зручних символічних позначень для позначення дій.

До середини XVI століття повністю склався апарат символів сучасної алгебри – вживання літер для позначення як шуканого невідомого, а й всіх взагалі які входять у завдання величин. Основоположником символічної алгебри став французький математик Франсуа Вієт [20]. Нова система дозволила просто, ясно та компактно описати загальні закони арифметики та алгоритми. Серед безпосередніх продовжувачів справи створення символічної

алгебри можна назвати англійських математиків Томаса Герріота та Вільяма Відреда, а також французького математика Альбера Жірара, практично сучасний вид алгебраїчну мову отримав у XVII столітті.

Рене Декарт (1596-1650) у своїй праці «Геометрія» представив математичний метод, який є одним із ранніх прикладів символічної алгебри. Він використовував літери для представлення чисел та коефіцієнтів у рівняннях, що вважається попередником символічної алгебри [8].

Рене Декарт використовував символічну алгебру для вирішення рівнянь та подання геометричних об'єктів в формі алгебри. Це був перший крок до абстрактної алгебри [5].

Роботи Альберта Гірона з теорії рівнянь представили розуміння коренів рівнянь як алгебраїчних об'єктів, що досліджуються в абстрактному контексті.

Леонард Ейлер (1707-1783) швейцарський математик і фізик, зробив важливі вклади в алгебру, хоча його робота часто пов'язана з аналізом і теорією чисел. Він розробив теорію загального поділу на нуль та розглянув основи алгебри у своїх працях.

Італійський математик Лагранж (1736-1813) розробив теорію аналітичної механіки і працював з поліномами Лагранжа, які використовувалися в алгебрі.

Починаючи з середини XVIII століття, завдання про розв'язання рівнянь п'ятого ступеня стало одним із важливих питань для математиків.

Багато математиків, включаючи Адрієна-Марі Лежандра і Нільса Генріка Абеля, працювали над цією проблемою, і це призвело до виникнення теорії груп.

Одним із ключових результатів було доведення Нільсом Абелем нерозв'язності рівнянь п'ятого ступеня методами алгебри.

Приклади абстрактних структур алгебри у XVIII столітті:

- Комплексні числа: Введення комплексних чисел, представлених у вигляді $a + bi$, де a і b – дійсні числа, а i – уявна одиниця, являло собою перший крок у створенні загальних алгебраїчних структур.

- Рівняння п'ятого ступеня: Дослідження рівнянь п'ятого ступеня та їх нерозв'язність методами алгебри призвело до більш глибокого розуміння абстрактної алгебри та необхідності розробки нових концепцій, таких як групи.

XVIII століття було часом, коли деякі ключові ідеї, пов'язані з абстрактною алгеброю, почали формуватися, і вони стали важливими стартовими точками для глибших досліджень у наступні століття. Особливо важливими стали ідеї, пов'язані з розв'язанням рівнянь та новими структурами алгебри.

У XIX столітті математики почали розглядати структури алгебри в більш абстрактному і узагальненому вигляді. Розглянемо детальний огляд цього процесу:

1) Еваріст Галуа та теорія груп:

Еваріст Галуа (1811-1832), французький математик, вважається одним із засновників теорії груп. Галуа розробив концепцію груп як абстрактних математичних структур, досліджуючи симетрії рівнянь та коріння поліномів.

Його робота «Теорія рівнянь алгебри» сформулювала основні поняття теорії груп, такі як підгрупи, суміжні класи та інваріанти.

Одним з важливих результатів був доведення неможливості розв'язання рівнянь п'ятого і вищого ступеня методами алгебри, що призвело до створення теорії груп з точки зору симетрій і перестановок.

2) Карл Фрідріх Гаус і Вільгельм Германн Дірекле:

У XIX столітті Гаус і Дірекле продовжили вивчати абстрактну алгебру та її зв'язок з теорією чисел. Гаус ввів поняття кільця цілих чисел і досліджував теорію квадратичних форм, що мало велике значення для теорії чисел.

Діріхле зробив істотний внесок у абстрактну алгебру і теорію груп, і навіть у теорію простих чисел і розв'язання рівнянь [5].

3) Артін, Дедекінд та сучасна абстрактна алгебра:

Наприкінці XIX і на початку XX століття абстрактна алгебра отримала свій сучасний розвиток. Еміль Артін та Ріхард Дедекінд зробили важливі вклади в абстрактну алгебру, створивши теорію алгебр, кілець та полів.

Артін розробив теорію алгебр, включаючи алгебри над речовими числами та алгебри Галуа. Він також запровадив поняття алгебри над полем.

Дедекінд вніс важливі поняття в теорію чисел, такі як ідеали та модулі, що стало частиною сучасної абстрактної алгебри.

Приклади абстрактних алгебраїчних структур у XIX столітті:

- Групи: Поняття групи було сформульовано Галуа та розвивалося математиками вікових років. Одним із перших прикладів груп є група перестановок. Це поняття виявилось дуже впливовим у математиці та фізиці.

- Кільця та поля: Поняття кільця цілих чисел було розроблено Гаусом та Діріхле. Вони також досліджували структури, пов'язані з арифметикою, та зробили важливий внесок у теорію чисел.

Алгебри: Артін і Дедекінд створили теорію алгебр та розробили поняття алгебри над полем, алгебри над кільцем та ін.

З розвитком абстрактної алгебри XIX століття математики почали розглядати алгебраїчні структури у контексті конкретних чисел і рівнянь, а й узагальнені концепції, які знайшли широке застосування у багатьох галузях математики та її додатках.

Розвиток абстрактної алгебри у XX столітті був вражаючим і супроводжувався створенням нових структур та теорій. У цей період математики почали розробляти більш узагальнені алгебраїчні концепції, які вплинули на безліч областей математики та науки. Ось докладний огляд цього періоду та кілька прикладів:

1) Теорія груп:

XX століття стало золотим століттям для теорії груп. Багато важливих результатів і концепцій були розроблені в цій галузі. На початку XX століття робота Артура Келі та Людвіга Зільке стала відправною точкою для розвитку теорії груп. Вони розглядали симетрії та перестановки об'єктів як групи операцій.

Згодом вклади математиків, таких як Еміль Артін, Ісаак Шур, Карл Густав Хеддер та Клод Шевалле, призвели до створення великої теорії груп, включаючи кінцеві та нескінченні групи.

Першим важливим внеском були роботи Софуса Лі та Ельї Картана, які розробили теорію алгебр Лі та груп Лі, що стало фундаментом для сучасної фізики та геометрії.

2) Теорія кілець та полів:

Безліч важливих теорем та результатів було отримано в галузі теорії кілець та полів.

Аксіоматична теорія поля була розроблена математиками, такими як Давид Гільберт та Ернст Зейлендорф. Це дозволило визначити структури полів та довести фундаментальні теореми, такі як теорема Галуа.

3) Категорії та функтори:

Теорія категорій, запропонована Самуелем Ейлем у 1945 році, стала одним із ключових елементів сучасної абстрактної алгебри.

Категорії та функтори стали інструментами вивчення алгебраїчних структур та його відносин [5].

4) Теорія алгебраїчних систем:

Важливим етапом була розробка теорії алгебраїчних систем, яка об'єднує різні структури алгебри в єдину теорію.

Ця теорія дозволила абстрактніше розглядати алгебраїчні об'єкти та їх властивості [9].

Приклади абстрактних алгебраїчних структур у XX столітті:

- Топологічні групи: Ці структури інтегрують алгебраїчні та топологічні концепції, і вони відіграють важливу роль у сучасній топології та геометрії.

- Алгебраїчні теорії та моноїди: Теорія моноїдів стала важливою в теорії автоматів та формальних мов, що знайшло застосування у комп'ютерних науках.

- Алгебраїчні категорії: Теорія категорій дозволила розробляти узагальнені концепції у різних галузях математики.

- Супералгебри: У математиці та фізиці були розроблені супералгебри, які узагальнюють структури алгебри, враховуючи антикомутативні властивості. Вони відіграють важливу роль у суперсиметричній теорії елементарних частинок [11].

Важливо відзначити, що абстрактна алгебра ХХ століття стала інструментом вивчення більш великих математичних структур та їх застосування у фізиці, інженерії, комп'ютерних науках та інших галузях. Цей період приніс безліч нових і глибоких концепцій і вплинув на розвиток сучасної математики.

1.2. Алгебраїчні структури

1.2.1. Бінарна операція

Якщо є деяка множина X , то бінарною операцією, заданою на цій множині, називається відображення $X \times X \rightarrow X$. Бінарна операція $(*)$ називається комутативною, коли для будь-яких a і $b \in X$ справджується рівність

$$a * b = b * a. \quad (1.1)$$

Бінарна операція $(*)$ називається некомутативною, якщо

$$a * b \neq b * a. \quad (1.2)$$

Бінарна операція $(*)$ на множині X називається асоціативною, якщо для будь елементів a, b і c множини X справджується рівність

$$(a * b) * c = a * (b * c). \quad (1.3)$$

Бінарна операція $(*)$ називається неасоціативною якщо

$$(a * b) * c \neq a * (b * c). \quad (1.4)$$

Множина X з введеною бінарною операцією $(*)$ називається алгебраїчною структурою [7].

Алгебраїчна структура позначається так: $(X, *)$. Алгебраїчна структура називається комутативною (асоціативною), якщо бінарна операція комутативна (асоціативна).

Елемент $e \in X$ називається нейтральним елементом відносно операції $(*)$, якщо для будь-якого елемента a з множини X справджуються рівності

$$a * e = e * a = a. \quad (1.5)$$

Нейтральний елемент називають також одиницею e .

Якщо $\forall a \in X \ e_l * a = a$, то e_l називається одиницею з ліва, якщо

$$\forall a \in X \ a * e_r = a, \quad (1.6)$$

то e_r називається одиницею з права.

Нехай у множині X з бінарною операцією $(*)$ є нейтральний елемент e . Елемент $a' \in X$ називається симетричним елементу $a \in X$ (або оберненим до a), якщо

$$a * a' = a' * a = e. \quad (1.7)$$

Множина X з асоціативною бінарною операцією $(*)$ називається напівгрупою.

Якщо напівгрупа $(X, *)$ містить нейтральний елемент, то її називають напівгрупою з одиницею або моноїдом.

У напівгрупі з одиницею e для кожного елемента існує щонайбільше один обернений елемент.

Справді, якщо $a * a' = a' * a = e$ і $a * a'' = a'' * a = e$ то маємо що:

$$a' = a' e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''. \quad (1.8)$$

Обернений до a елемент позначатимемо через a^{-1} . Елемент, для якого існує обернений, називається оборотним.

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e. \quad (1.9)$$

1.2.2. Група

Моноїд, у якого всі елементи оборотні називається групою. Проте найчастіше застосовують інше визначення.

Група – це скінченний або нескінченний набір елементів разом із бінарною операцією (так званою груповою операцією), які разом задовольняють чотирьом аксіомам:

$$\text{замкнутості } \forall a, b \in G \quad a * b \in G \quad (1.10)$$

$$\text{асоціативності } \forall a, b \in G \quad a * (b * c) = (a * b) * c \quad (1.11)$$

$$\text{тотожності } \exists e \in G : \forall a \in G \quad a * e = e * a \quad (1.12)$$

$$\text{інверсії } \forall a \in G : \quad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \quad (1.13)$$

Операцію, щодо якої визначається група, часто називають «груповою операцією», а про набір кажуть, що це група, «підпорядкована» цій операції.

Якщо операцію в групі G називають множенням, то групу називають мультиплікативною, якщо G утворює групу відносно звичайного додавання, то групу називають адитивною.

Якщо бінарна операція $(*)$ комутативна, то група G називається комутативною або абелевою.

Групу, що містить скінчену кількість елементів, називають скінченною. Кількість елементів скінченної групи називають її порядком [10].

Групу, що не є скінченною, називають нескінченною.

Група має деякі властивості.

- для $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ та елемента a групи G виконуються рівності

$$a^n * a^m = a^{n+m} \text{ та } (a^n)^m = a^{n*m} \quad (1.14)$$

- для $\forall a, b \in G$ кожне з рівнянь $a * x = b$ і $y * a = b$ має єдиний розв'язок;

- для $\forall a, b, c \in G$ з рівності $a * b = a * c$ випливає рівність $b = c$.

Нехай G і H групи, якщо $H \subseteq G$ то H називають підгрупою групи G .

Сама група G та група, яка складається лише з нейтрального елемента, є тривіальними (найпростішими) підгрупами групи G .

Усі інші підгрупи називаються нетривіальними.

Підгрупа H групи G називається власною підгрупою, якщо $H \neq G$. Власна підгрупа H групи G називається максимальною підгрупою в G , якщо не існує жодної іншої власної підгрупи групи G , яка б містила підгрупу H .

Власна підгрупа H групи G називається мінімальною підгрупою групи G , якщо не існує жодної іншої власної підгрупи групи G , відмінної від групи $E = \{e\}$, яка б містилася у підгрупі H .

Якщо G – мультиплікативна група, то порядком елемента a групи G називається найменше натуральне число n (найменший додатний показник n), для якого $a^n = e$.

Якщо такого показника не існує, то a називається елементом нескінченного порядку.

Підмножина $M \subseteq G$ групи G називається системою твірних елементів групи G , якщо M не міститься в жодній власній підгрупі з G .

M буде системою твірних групи G тоді й лише тоді, коли кожен елемент $g \in G$ можна записати у вигляді $g = a_1 a_2 \dots a_s$, де кожен множник a_i належить множині M або є оберненим до елемента з M .

Група, для якої існує система твірних з одного елемента, називається циклічною. Множина всіх елементів групи G буде системою твірних для G , але це надлишкова система.

Система твірних з якої неможна вилучити жодного елемента, називається незвідною.

Якщо кількість елементів незвідної системи твірних групи є скінченною, то таку групу G називають скінченнопородженою.

В кожній скінченній групі існують незвідні системи твірних, причому вони можуть складатися з різних елементів, тобто незвідна система твірних вибирається неоднозначно.

Незвідні системи твірних групи G можуть містити навіть різну кількість елементів. Нескінченні групи не обов'язково повинні мати незвідні системи твірних, наприклад, адитивна група раціональних чисел.

З іншого боку, існують нескінченні групи зі скінченною незвідною групою твірних, наприклад адитивна група цілих чисел породжена одним елементом.

Група G називається циклічною, якщо вона складається зі степенів (кратних) одного із своїх елементів a .

Елемент a називається твірним елементом циклічної групи.

Циклічна група з твірним елементом a позначається $\langle a \rangle$. Кожна циклічна група абелева.

1.2.3. Морфізми груп

Нехай G – мультиплікативна група з одиницею e . Порядком елемента $a \in G$ називається найменше натуральне число n , для якого $a^n = e$.

Якщо елемент $a \in G$ є елементом скінченного порядку n (пишуть $|a| = n$), то порядок циклічної групи $\langle a \rangle$ збігається з порядком твірного елемента.

Якщо елемент $a \in G$ є елементом нескінченного порядку, то циклічна група $\langle a \rangle$ нескінченна.

Всі циклічні групи одного порядку n ізоморфні між собою.

Всі циклічні групи нескінченного порядку ізоморфні між собою [7].

Якщо множина G відображається в множину H , таким чином, що кожному елементу множини G за деяким правилом φ поставлено у відповідність один і тільки один елемент множини H ; $\varphi: G \rightarrow H$, то відображення називають сюр'єктивним, або відображення множини G на множину H , якщо кожний елемент множини H є образом деякого елемента множини G .

Відображення $\varphi: G \rightarrow H$ називають ін'єктивним, якщо воно різним елементам множини G зіставляє різні елементи множини H .

Відображення $\varphi: G \rightarrow H$ називають бієктивним, або взаємно однозначним, відображенням множини G на множину H , якщо кожний

елемент множини H є образом єдиного елемента множини G (тобто відображення є ін'єктивним і сюр'єктивним одночасно).

Відображення $f : G \rightarrow G$ групи $(G,*)$ в групу (G',\circ) називається гомоморфізмом, якщо для $\forall a, b \in G$ виконується рівність $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$.

Гомоморфізм $f : G \rightarrow G$ групи G в себе називається ендоморфізмом.

Гомоморфізм $f : G \rightarrow G$ називається епіморфізмом, якщо відображення $f : G \rightarrow G$ є сюр'єктивним.

Гомоморфізм $f : G \rightarrow G$ називається мономорфізмом, якщо відображення $f : G \rightarrow G$ є ін'єктивним.

Бієктивний гомоморфізм $f : G \rightarrow G$ називається ізоморфізмом (тобто гомоморфізм $f : G \rightarrow G$ є ізоморфізмом), якщо відображення f є ін'єктивним і сюр'єктивним одночасно.

Ізоморфізм групи G на себе називають автоморфізмом.

При кожному ізоморфізмі відображенні $\varphi : G \rightarrow G_1$ групи $(G,*)$ в групу G_1 нейтральний елемент e групи G відображається в нейтральний елемент e_1 групи G_1 , тобто $\varphi(e) = e_1$, образ оберненого елемента e оберненим до образу елемента, тобто $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$, порядки ізоморфних груп рівні.

Коли множина G_1 із визначеною бінарною операцією \circ , ізоморфна деякій групі $(G,*)$, то (G_1, \circ) також є групою.

Якщо група $(G,*)$ є абелевою (або циклічною) та відображення $\varphi : G \rightarrow G_1$ є ізоморфним, то (G_1, \circ) також абелева (відповідно циклічна) група.

1.2.4. Кільце

Непорожня множина K , на якій введено дві бінарні операції $(*)$ і (\circ) , називається кільцем, якщо виконуються такі умови:

- множина K є абелевою групою відносно операції $(*)$,
- операція (\circ) – асоціативна на множини K ,

– операція (\circ) – дистрибутивна відносно операції $(*)$, тобто

$$\forall a, b, c \in K$$

$$(a * b) \circ c = a \circ c * b \circ c; \quad (1.15)$$

$$c \circ (a * b) = c \circ a * c \circ b. \quad (1.16)$$

операції $(*)$ і (\circ) часто називають відповідно додаванням і множенням.

Враховуючи це, можна дати таке означення: непорожня множина K з бінарними операціями додавання і множення називається кільцем, якщо відносно додавання вона є абелевою групою, відносно множення – напівгрупою, і має місце дистрибутивність множення відносно додавання як зліва, так і справа [4].

Абелева група $(K, +)$ називається адитивною групою кільця K . Так визначені кільця називають асоціативними, за рахунок асоціативного множення.

Кільце називають комутативним, якщо операція множення комутативна

$$\forall a, b \ a \circ b = b \circ a. \quad (1.17)$$

Елемент e кільця K називається правою одиницею цього кільця, якщо для $\forall a \in K$ має місце $ae = a$, відповідно лівою одиницею кільця – якщо для

$$\forall a \in K \ ea = a. \quad (1.18)$$

Елемент e кільця K називається одиницею цього кільця, якщо він одночасно є лівою і правою одиницею.

Ненульове кільце K , в якому існує одиничний елемент e відносно операції множення, називають кільцем з одиницею.

У кожному кільці K сума будь-яких його елементів a_1, a_2, \dots, a_n не залежить від способу розставлення дужок і порядку розміщення доданків.

У кожному кільці K здійснення операція віднімання.

У кожному кільці K містяться кратні na будь-якого елемента a ($n \in \mathbb{Z}$)

Для будь-яких елементів a і b кільця K та довільних цілих чисел m і n справджуються такі рівності:

$$(m + n)a = ma + na; \quad (1.19)$$

$$m(a + b) = ma + mb; \quad (1.20)$$

$$m(na) = (mn)a. \quad (1.21)$$

У кожному кільці K для будь-яких його елементів a_1, a_2, \dots, a_n справджується така рівність:

$$-(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = (-a_1) + (-a_2) + \dots + (-a_n). \quad (1.22)$$

У кожному кільці K для будь-якого його елемента a і довільного натурального числа n справджується рівність:

$$n(-a) = -(na). \quad (1.23)$$

У кожному кільці K для будь-яких його елементів a і b справджуються рівності:

$$(-a)b = -ab; \quad (1.24)$$

$$a(-b) = -ab; \quad (1.25)$$

$$(-a)(-b) = ab. \quad (1.26)$$

У кожному кільці нульовий елемент 0 єдиний.

У кожному кільці з одиницею одиничний елемент 1 єдиний.

У кожному кільці K для будь-якого його елемента a :

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0. \quad (1.27)$$

Непорожня підмножина A кільця K називається підкільцем, якщо вона сама є кільцем відносно тих самих операцій, що введені на K .

У кожному кільці K є такі підкільця: саме кільце K та нульове підкільце, яке складається лише з нульового елемента – їх називають тривіальними.

Всі інші підкільця називають нетривіальними [1].

Для того щоб з'ясувати, чи є дана непорожня підмножина A кільця K його підкільцем, використовується критерій підкільця: непорожня підмножина A кільця K буде підкільцем тоді й лише тоді, коли A є замкненою відносно операцій множення та віднімання.

Перетин довільної родини підкілець кільця K також буде підкільцем цього кільця та підкільце комутативного кільця є комутативним.

Якщо $(K, +, *)$ – кільце, $a, b \in K, a \neq 0, b \neq 0, ab = 0$, то елемент a називається лівим дільником нуля, b називається правим дільником нуля.

Дільником нуля називається такий елемент кільця K який одночасно є лівим та правим дільником нуля.

В комутативному кільці лівий дільник нуля буде правим дільником нуля, і навпаки.

Комутативне кільце з одиницею без дільників нуля називається областю цілісності або цілісним кільцем.

Елемент $a \in K$ називається нільпотентним елементом, якщо існує таке натуральне число n , що $a^n = 0$. Найменше таке n називається ступенем нільпотентності елемента a . Таким чином, кожний нільпотентний елемент є дільником нуля.

Нехай тепер K – кільце з одиницею. Елемент $a \in K$ називається лівим (відповідно правим) дільником одиниці, якщо існує такий неединичний елемент $b \in K$, що $ab = 1$ (відповідно $ba = 1$). Якщо елемент одночасно є лівим і правим дільником одиниці, то його називають дільником одиниці.

Дільники одиниці називають оборотними елементами, ліві дільники одиниці називають оборотними справа, праві дільники одиниці називають оборотними зліва. До необоротних елементів відносяться всі дільники нуля та сам нуль.

1.2.5. Поле

Комутативне кільце з одиницею, в якому для кожного ненульового елемента існує обернений, називають полем.

Поле називається скінченним, якщо кількість елементів у ньому скінченна.

Характеристикою поля P з одиницею e і нулем \emptyset називають найменше натуральне число p , для якого $pe = \emptyset$. Якщо рівність $pe = \emptyset$ виконується лише при $p = 0$, то вважають, що P є полем характеристики нуля.

Всі числові поля мають характеристику нуля, всі скінченні поля мають скінченну характеристику p , причому p – просте число.

Також зауважимо, що жодне поле не має дільників нуля [1].

Кільце, що складається з одного нуля, не вважається полем.

Висновки до розділу 1

Вивчення історії алгебраїчних структур надало глибокий погляд на еволюцію математичних ідей та абстракцій. Від розробки основних понять алгебри в античних математичних трактатах до формального визначення груп в XIX столітті.

Розглянуті основні типи алгебраїчних структур такі як групи, кільця та поля демонструють важливість структурних концепцій у сучасній математиці. Ці структури збагачують наше розуміння алгебраїчних об'єктів та їх взаємодії, відіграючи ключову роль у вирішенні різних математичних завдань.

Історія алгебраїчних структур також демонструє безперервний розвиток абстракції в математиці. Перехід від конкретних операцій до абстрактних структур відкриває нові горизонти для досліджень та застосувань і дозволяє узагальнювати математичні концепції для їх ширшого застосування.

Отримані у цьому розділі знання з історії алгебраїчних структур та їх основних типів надають фундаментальне розуміння, необхідне для більш глибокого вивчення вільних моногенних узагальнених дігруп у наступному розділі.

Алгебраїчні структури, такі як групи і кільця, є важливими інструментами в сучасних математичних дослідженнях, і їх абстрактні властивості надають основи для подальших досліджень.

РОЗДІЛ 2

ДІМОНОЇДИ ТА ДІГРУПИ

2.1. Дімоноїди

Цей розділ присвячений вивченню питання дімоноїди, а саме розглянуто загальні визначення, незалежність аксіом дімоноїда, аналог теореми Келі, найменшу сепаративну конгруенцію та вільні дімоноїди. Дослідженню даної проблеми алгебри присвятили свої праці провідні вчені-математики, зокрема Жучок А.В. [27], Жучок Ю.В. та Пілц Г.Ф. [25], Лію К [18], Людей Ю.-Л. [19] та інші науковці.

2.1.1. Загальні визначення

Асоціативний дімоноїд, або скорочено дімоноїд, — це множина D , оснащена двома бінарними операціями, які називаються відповідно \dashv - лівим добутком D і \vdash правим добутком [19]:

$$\dashv: D \times D \rightarrow D, \quad (2.1)$$

$$\vdash: D \times D \rightarrow D, \quad (2.2)$$

що задовольняють наступні аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \quad (2.3)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (2.4)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (2.5)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (2.6)$$

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (2.7)$$

для всіх $x, y, z \in D$.

У позначеннях $x \dashv y$, $y \vdash x$, елемент x знаходиться на стороні вказівника, а елемент y – на стороні бар'єра. Співвідношення (2.3) і (2.7) є «асоціативністю» \dashv і \vdash відповідно.

Відношення (2.5) називається «внутрішня асоціативність», оскільки \vdash і \dashv направлені всередину.

Співвідношення (2.4) і (2.6) можна замінити співвідношеннями

$$x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z), \quad (2.8)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z, \quad (2.9)$$

Відображення f дімоноїда D_1 в дімоноїд D_2 називається гомоморфізмом, якщо $(x < y)f = xf < yf, (x > y)f = xf > yf$ для всіх $x, y \in D_1$. Крім того, якщо відображення f взаємно однозначне, то f – ізоморфізм. Підмножина T дімоноїда $(D, <, >)$ називається піддімоноїдом, якщо для $\forall a, b \in D$ з $a, b \in T$ слід $a \dashv b, a \vdash b \in T$.

Елемент $e \in X$ називається бар-одиноцею дімоноїда D , якщо

$$\forall x \in D \ x \dashv e = x = e \vdash x. \quad (2.10)$$

Тому лише припускається, що e діє тривіально на стороні бар'єру. Бар-одиноця не є унікальною. Сукупність бар-одиноць називається гало [21].

Морфізм дімоноїдів називається унітальним, якщо образ бар-одиноці є бар-одиноцею [30].

Символом N позначається множина позитивних цілих чисел.

Нехай (D, \dashv, \vdash) – дімоноїд, $a \in D, n \in N$.

Через a^n (через na) будемо позначати n -тий ступінь елемента a щодо операції \dashv (\vdash).

Розглянемо основні леми.

Лема 1. [30]

Нехай (D, \dashv, \vdash) – дімоноїд з комутативною операцією \cdot .

Для всіх $b, c \in D, m \in N, m > 1$ мають місце рівності

$$(b \dashv c)^m = b^m \vdash c^m = (b > c)^m. \quad (2.11)$$

Лема 2. [30]

Нехай $((D, \dashv, \vdash)$ – дімоноїд з комутативною операцією \vdash .

Для всіх $b \in D, m \in N$ має місце рівність

$$2b^m = 2mb. \quad (2.12)$$

Комутативна напівгрупа ідемпотентів називається напіврешіткою. Комутативна напівгрупа S є сепаративною, якщо для

$$\forall s, t \in S \ 3s^2 = st = t^2 \Rightarrow s = t. \quad (2.13)$$

Напівгрупа S називається глобально ідемпотентною, якщо $S^2 = S$ [30].

Лема 3. [30]

Операції дімоноїда (D, \dashv, \vdash) збігаються, якщо виконується одна з наступних умов:

- a) (D, \dashv) – напівешітка;
- b) (D, \dashv) – напівгрупа з лівим (двобічним) скороченням;
- c) (D, \dashv) – комутативна сепаративна напівгрупа;
- d) (D, \dashv) – комутативна глобально ідемпотентна напівгрупа.

Доведення (а). Для всіх $x, y, z \in D$ маємо

$$\begin{aligned}(x \vdash y) \dashv z &= z \dashv (x \vdash y) = (z \dashv x) \dashv y = \\ &= x \dashv (y \dashv z) = x \vdash (y \dashv z)\end{aligned}$$

згідно з комутативністю операції \dashv та аксіомам (2.3) – (2.5) дімоноїда.

Підставляючи $y = z$ в останню рівність і використовуючи ідемпотентність операції \dashv отримуємо $x \dashv y = x \vdash y$.

Доведення (b). Для всіх $x, y, z \in D$, згідно аксіомам (2.3) та (2.4) дімоноїда маємо

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \vdash z),$$

звідки завдяки лівому скороченню отримуємо, що $y \dashv z$ $y \vdash z$ для всіх $y, z \in D$. Випадок двостороннього скорочення розглядається аналогічно.

Доведення (c). Нехай $\forall x, y \in D$, $a = x \dashv y$, $b = x \vdash y$.

Тоді $a^2 = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2$,

$$a \dashv b = (x \dashv y) \dashv (x \vdash y) = (x \dashv y)^2,$$

$$b^2 = (x \vdash y) \dashv (x \vdash y) = (x \vdash y)^2 = (x \dashv y)^2$$

згідно аксіомам (2.3) та (2.4) дімоноїда і леми 1. В силу сепаративності комутативної напівгрупи (D, \dashv) з $a^2 = a < b = b^2$ випливає, що $a = b$.

Доведення (d). Нехай $\forall x, y \in D$, $y = y_1 \dashv y_2$, і $y_1, y_2 \in D$. Тоді

$$\begin{aligned}x \dashv y &= x \dashv (y_1 \dashv y_2) = (y_2 \dashv x) \dashv y_1 = \\ &= y_2 \dashv (x \vdash y_1) = (x \vdash y_1) \dashv y_2 = \\ &= x \vdash (y_1 \dashv y_2) = x \vdash y\end{aligned}$$

Згідно комутативності операції \dashv та аксіомам $(D1) - D(3)$ дімоноїда.

Лему доведено.

Лема 4. [30]

Нехай (D, \dashv, \vdash) – дімоноїд. Для всіх $x, y, t \in D, n \in N$ мають місце рівності:

$$(x \dashv y)^n \vdash t = n(x \vdash y) \vdash t = n(x \dashv y) \vdash t; \quad (2.14)$$

$$t \dashv n(x \vdash y) = t \dashv (x \dashv y)^n = t \dashv (x \vdash y)^n; \quad (2.15)$$

Доведення (2.14). Скористаємося індукцією з n . Для $n = 1$ маємо $(x \dashv y) \vdash t = (x \vdash y) \vdash t$. Згідно з аксіомами (2.6) та (2.7) дімоноїда.

Нехай

$(x \dashv y)^k \vdash t = k(x \vdash y) \vdash t$ для $n = k$. Тоді для $n = k + 1$ отримуємо

$$\begin{aligned} (x \dashv y)^{k+1} \vdash t &= ((x \dashv y) \dashv (x \dashv y)^k) \vdash t = \\ &= ((x \dashv y) \vdash (x \dashv y)^k) \vdash t = \\ &= ((x \succ y) \vdash (x \dashv y)^k) \vdash t = \\ &= (x \vdash y) \vdash ((x \dashv y)^k \vdash t) = \\ &= (x \vdash y) \vdash k(x \vdash y) \vdash t = \\ &= (k + 1)(x \vdash y) \vdash t \end{aligned}$$

в силу аксіом (2.6) та (2.7) дімоноїда та припущення.

Таким чином, $(x \dashv y)^n \vdash t = n(x \vdash y) \vdash t$ для всіх $n \in N$.

Покажемо, що $(x \dashv y)^n \vdash t = n(x \dashv y) \vdash t$ для всіх $x, y, t \in D, n \in N$.

Для $n = 1$ рівність, є вірним.

Нехай $(x \dashv y)^k \vdash t = k(x \dashv y) \vdash t$ для $n = k$.

Тоді отримуємо для $n = k + 1$ що

$$\begin{aligned} (x \dashv y)^{k+1} \vdash t &= ((x \dashv y) \dashv (x \dashv y)^k) \vdash t = \\ &= ((x \dashv y) \vdash (x \dashv y)^k) \vdash t = \\ &= (x \dashv y) \vdash ((x \dashv y)^k \vdash t) = \\ &= (x \dashv y) \vdash k(x \dashv y) \vdash t = \\ &= (k + 1)(x \dashv y) \vdash t \end{aligned}$$

в силу аксіом (2.6) та (2.7) дімоноїда та припущення. Таким чином,

$(x \dashv y)^n \vdash t = n(x \dashv y) \vdash t$ для всіх $n \in N$.

Лему доведено.

Аналогічно доводиться рівність (2.15).

Нехай S – напівгрупа, $a \in S$. Елементи $x, y \in S$ називаються a -пов'язаними, якщо існують $n, m \in N$, такі що $(xa)^n \in yaS$ та $(ya)^m \in xaS$.

Напівгрупа S називається a -пов'язаною, якщо будь-які два її елементи є a -пов'язаними [18].

Лема 5. [30]

Нехай (D, \dashv, \vdash) – дімоноїд, $a \in D$. Якщо напівгрупа (D, \dashv) є a -пов'язаною, то a -пов'язаною є і напівгрупа (D, \vdash) .

Доведення. Нехай (D, \dashv) пов'язана напівгрупа, $x, y \in D$. Тоді є $n \in N$, таке що $(x \dashv a)^n \in y \dashv a \dashv D$ та $(y \dashv a)^n \in x \dashv a \dashv D$. Звідси

$$(x \dashv a)^n = y \vdash a \vdash t_1, \quad (2.16)$$

$$(x \dashv a)^n = y \dashv a \dashv t_2 \quad (2.17)$$

Для деяких $t_1, t_2 \in D$ покладемо $t_3 = t_1 \vdash x \vdash a, t_4 = t_2 \vdash y \vdash a$.

Рівності (2.16) та (2.17) помножимо відповідно на $x \vdash a$ і $y \vdash a$:

$$\begin{aligned} (x \dashv a)^n \vdash (x \vdash a) &= n(x \vdash a) \vdash (x \vdash a) = \\ &= (n+1)(x \vdash a) = (y \dashv a \dashv t_1) \vdash (x \vdash a) = \\ &= ((y \dashv a) \vdash t_1) \vdash (x \vdash a) = \\ &= y \vdash a \vdash t_1 \vdash x \vdash a = y \vdash a \vdash t_3, \\ (y \dashv a)^n \vdash (y \vdash a) &= n(y \vdash a) \vdash (y \vdash a) = \\ &= (n+1)(y \vdash a) = (x \dashv a \dashv t_2) \vdash (y \vdash a) = \\ &= ((x \dashv a) \vdash t_2) \vdash (y \vdash a) = \\ &= x \vdash a \vdash t_2 \vdash y \vdash a = x \vdash a \vdash t_4 \end{aligned}$$

згідно (2.14) та аксіомам (2.6) та (2.7) дімоноїда. Таким чином,

$(n+1)(x \vdash a) \in y \vdash a \vdash D, (n+1)(y \vdash a) \in x \vdash a \vdash D$. Отже, (D, \vdash) – a -пов'язана напівгрупа.

Лему доведено.

Дімоноїд (D, \dashv, \vdash) називається дімоноїд ідемпотентів або дісполукою, якщо $x \dashv x = x = x \vdash x$ для всіх $x \in D$ [14, 28].

Якщо $\varphi: S \rightarrow T$ – гомоморфізм дімоноїдів, то через Δ_φ позначатимемо відповідну конгруенцію на дімоноїді S .

Якщо S – довільний дімоноїд, а J – деякий дімоноїд ідемпотентів, тоді $\alpha: S \rightarrow J, x \mapsto x\alpha$ – гомоморфізм і кожен клас конгруенції Δ_α є піддімоноїдом дімоноїда S . Сам дімоноїд S є об'єднанням дімоноїдів $S_\xi, \xi \in J$, таких що

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \mid (x; t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi \dashv S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \dashv \varepsilon}, S_\xi \vdash S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \vdash \varepsilon},$$

$$\xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \emptyset.$$

У цьому випадку будемо говорити, що S розкладається в дісполуку піддімоноїдів (або S є дісполукою J піддімоноїдів $S_\xi, \xi \in J$).

Якщо J є напівгрупою ідемпотентів (сполукою), то говорять, що S є сполукою J піддімоноїдів $S_\xi, \xi \in J$.

Якщо ж J є комутативна напівгрупа ідемпотентів (напіврешітка), то кажемо, що S є напіврешіткою J піддімоноїдів $S_\xi, \xi \in J$.

Якщо ρ – конгруенція на дімоноїді (D, \dashv, \vdash) , така що $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ є дімоноїдом ідемпотентів, то говорять, що ρ – ідемпотентна конгруенція.

Нехай (D, \dashv, \vdash) — дімоноїд з комутативною операцією \dashv (відповідно \vdash), $a, b \in D$. Говорять, що a \dashv -ділить b (відповідно a \vdash -ділить b) і використовують запис $a \dashv \mid b$ (відповідно $a \vdash \mid b$), якщо існує елемент x напівгрупи (D, \dashv) , відповідно (D, \vdash) з одиницею, такий що $a \dashv x = b$ (відповідно $a \vdash x = b$).

Дімоноїд (D, \dashv, \vdash) називається комутативним, якщо напівгрупи (D, \dashv) і (D, \vdash) комутативні.

Теорема № 1. [27] Відношення η дімоноїда (D, \dashv, \vdash) із комутативною операцією \dashv є найменшою ідемпотентною конгруенцією, а $(D, <, >)/\eta$ є комутативним ідемпотентним дімоноїдом, який є напіврешіткою [14].

Визначимо відношення η на дімоноїді $(D, <)$ та $(D, >)$ з комунікативною операцією $>$, поклавши $a\eta b$, якщо існує $m, n \in N, m \neq 1, n \neq 1$, такі що $a_{<}|b^m, b_{<}|a^n$.

2.1.2. Незалежність аксіом дімоноїда

Теорема № 2. [30] Система аксіом (2.3) – (2.7) дімоноїду незалежна.

Доведення. Нехай N – множина позитивних цілих чисел. На N визначимо операції \dashv та \vdash за правилами

$$(x \dashv y) = 2y, \quad (2.18)$$

$$x \vdash y = y \quad (2.19)$$

для $\forall x, y \in N$.

Модель (N, \dashv, \vdash) задовольняє аксіомам (2.4) – (2.7), але не задовольняє (2.3). Дійсно,

$$(x \dashv y) \dashv z = 2z = x \dashv (y \vdash z),$$

$$(x \dashv y) \dashv z = 2z = x \vdash (y \dashv z),$$

$$(x \dashv y) \vdash z = z = x \vdash (y \vdash z),$$

$$x \vdash (y \vdash z) = z = (x \vdash y) \vdash z,$$

$$x \dashv (y \dashv z) = 4z \neq 2z = (x \dashv y) \dashv z$$

для всіх $x, y, z \in N$.

Припустимо $x \dashv y = x$, $x \vdash y = 2x$ для всіх $x, y \in N$. Подібно до попереднього випадку можна показати, що модель (N, \dashv, \vdash) задовольняє аксіомам (2.3), (2.5) – (2.7), але не задовольняє (2.4). Дійсно,

$$x \dashv (y \dashv z) = x + y + z = (x \dashv y) \dashv z,$$

$$(x \vdash y) \dashv z = y + z = x \vdash (y \dashv z),$$

$$(x \dashv y) \vdash z = z = x \vdash (y \vdash z),$$

$$x \vdash (y \vdash z) = z = (x \vdash y) \vdash z,$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x + y + z = x + z = x \dashv (y \vdash z)$$

для всіх $x, y, z \in N$.

Припустимо $x \dashv y = x$, $x \vdash y = x + y$ для всіх $x, y, z \in N$.

Подібно до попереднього випадку можна показати, що модель (N, \dashv, \vdash) задовольняє аксіомам (2.3) – (2.5), (2.7), але не задовольняє (2.6).

Побудуємо останню модель (N, \dashv, \vdash) .

Нехай X – довільне непорожня множина, $|X| > 1$ та X^* – множина кінцевих непустих слів в алфавіті X . Першу літеру слова $\omega \in X^*$ позначимо через $w^{(0)}$, останню літеру слова через $w^{(1)}$.

На множини X^* визначимо операції \dashv і \vdash за наступними правилами:
 $w \dashv u = \omega^{(0)}$, $w \vdash u = u^{(1)}$ для всіх $\omega, u \in X^*$. Модель (X^*, \dashv, \vdash) задовольняє аксіомам (2.3), (2.4), (2.6), (2.7), але не задовольняє (2.5). Дійсно,

$$w \dashv (u \dashv \omega) = \omega^{(0)} = (w \dashv u) \dashv \omega,$$

$$(w \dashv u) \dashv \omega = \omega^{(0)} = w \dashv (u \vdash \omega),$$

$$(w \dashv u) \vdash \omega = \omega^{(1)} = w \vdash (u \vdash \omega),$$

$$w \vdash (u \vdash \omega) = \omega^{(1)} = (w \vdash u) \vdash \omega$$

Для всіх $w, u, \omega \in X^*$. Так як $|X| > 1$, то існує $u \in X^*$, таке що $u^{(1)} \neq u^{(0)}$.

Тоді

$$(w \vdash u) \dashv \omega = u^{(1)} \neq u^{(0)} = w \vdash (u \dashv \omega)$$

для всіх $w, \omega \in X^*$.

Теорему доведено.

2.1.3. Аналог теореми Келі

Симетричну напівгрупу на множині X позначимо $\mathfrak{S}(X)$. Нехай S – напівгрупа, $\alpha \in \mathfrak{S}(S)$. Піднапівгрупу T напівгрупи S називають α -узгодженою, якщо

$$a) \quad T(T_\alpha) \subseteq T;$$

$$b) (ab)\alpha = (a\alpha)(b\alpha) = (a(b\alpha))\alpha \text{ для всіх } a, b \in T;$$

$$c) abc = a(ba)c \text{ для всіх } a, b \in T.$$

Будь-яка піднапівгрупа напівгрупи S є α -узгодженою, якщо α – тотожне перетворення S .

Нехай $X \times Y$ — прямокутна сполука та $(a, b) \in X \times Y$. Покладемо $(x, y)\alpha = (a, b)$ для всіх $(x, y) \in X \times Y$, $T_x = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in Y\}$.

Безпосередньо перевіряється, що множина T_x , $x \in X$ є α -узгодженою піднапівгрупою напівгрупи $X \times Y$.

Нехай X — непорожня множина, і φ — фіксований ідемпотент симетричної напівгрупи $\mathfrak{S}(X)$ на X .

Покладемо $T = \{\tau \in \mathfrak{S}(X) \mid |Im \tau| = 1\}$, $\tau\alpha = \varphi$ для всіх $\tau \in \mathfrak{S}(X)$. Тоді T – α -узгоджена піднапівгрупа напівгрупи $\mathfrak{S}(X)$.

Нехай S – напівгрупа, $\alpha \in \mathfrak{S}(S)$, P – α -узгоджена підполугруп напівгрупи S . На P визначимо операції \dashv і \vdash за правилами

$$a \dashv b = a(b\alpha), \quad a \vdash b = ab \text{ для всіх } a, b \in P.$$

Лема 6. [30] (P, \dashv, \vdash) – дімоноїд.

Доведення. Оскільки P – α -узгоджена піднапівгрупа, то операція \dashv визначена коректною.

Операція \vdash асоціативна. Для всіх $a, b, c \in P$ маємо

$$\begin{aligned} (a \dashv b) \dashv c &= a(b\alpha) \dashv c = a(b\alpha)(c\alpha), \\ a \dashv (b \dashv c) &= a \dashv (b(c\alpha)) = a((b(c\alpha))\alpha), \\ a \vdash b \vdash c &= abc, \\ (a \dashv b) \vdash c &= a(b\alpha) \vdash c = a(b\alpha)c, \\ (a \vdash b) \dashv c &= ab \dashv c = ab(c\alpha), \\ a \vdash (b \dashv c) &= a \vdash b(c\alpha) = ab(c\alpha). \end{aligned}$$

Порівнюючи отримані вирази, та використовуючи α -узгодженість P , приходимо до висновку, що (P, \dashv, \vdash) – дімоноїд.

Лему доведено.

Дімоноїд (P, \neg, \vdash) позначмо через $S^\alpha(P)$.

Нехай $(D, <, >)$ – довільний дімоноїд, ε – довільний символ, $\varepsilon \in D$. Для кожного $a \in D$ визначимо перетворення ρ^a і ρ_a множини $D \cup \{\varepsilon\}$ таким чином

$$\begin{cases} x > a, & \text{якщо } x \in D, \\ a, & \text{якщо } x = \varepsilon \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} x < a, & \text{якщо } x \in D, \\ a, & \text{якщо } x = \varepsilon \end{cases} \quad (2.21)$$

для всіх $x \in D \cup \{\varepsilon\}$.

Лема 7. [30] Для всіх $a, b \in D$ наступні рівності вірні:

$$\rho^a \rho_b = \rho^{a < b}, \quad (2.22)$$

$$\rho^a \rho^b = \rho^{a > b}, \quad (2.23)$$

$$\rho_a \rho_b = \rho_{a < b} = \rho_{a > b}. \quad (2.24)$$

Доведення. Маємо

$$(x > a) < b = x > (a < b)$$

для всіх $x, a, b \in D$ в силу аксіоми (2.5) та

$$\varepsilon \rho^a \rho_b = a \rho_b = a < b = \varepsilon \rho^{a < b}$$

Звідси випливає $\rho^a \rho_b = \rho^{a < b}$. Так як

$$x \rho^a \rho^b = (x > a) \rho^b = (x > a) > b = x > (a > b) = x \rho^{a < b}$$

для всіх $x \in D$ згідно аксіоми (2.7) та $\varepsilon \rho^a \rho^b = a \rho^b = a > b = \varepsilon \rho^{a > b}$, то $\rho^a \rho^b = \rho^{a > b}$.

Нарешті, $(x < a) < b = x < (a < b) = x < (a > b)$ для всіх $x, a, b \in D$ згідно аксіомам (2.3) та (2.4) та $\varepsilon \rho_a \rho_b = \varepsilon \rho_b = \varepsilon = \rho_{a < b} = \varepsilon \rho_{a > b}$, тому $\rho_a \rho_b = \rho_{a < b} = \rho_{a > b}$.

Лему доведено.

Нехай $T_r^>(D) = \{\rho^a | a \in D\}$ і $T_r^<(D) = \{\rho^a | a \in D\}$. Тоді множини $T_r^<(D)$ і $T_r^>(D)$ є піднапівгрупами симетричної напівгрупи $\mathfrak{S}(D \cup \{\varepsilon\})$.

Нехай ψ – перетворення напівгрупи $\mathfrak{S}(D \cup \{\varepsilon\})$, таке що $\rho^a \psi = \rho_a$ для всіх $a \in D$.

Лема 8. [30] Піднапівгрупа $T_r^>(D)$ симетричної напівгрупи $\mathfrak{S}(D \cup \{\varepsilon\})$ є ψ -узгодженою.

Доведення. Нехай $\rho^a, \rho^b, \rho^c \in T_r^>(D)$. Згідно леми 7 та аксіомам (2.6) та (2.7) маємо

$$\begin{aligned} \rho^a(\rho^b \psi) &= \rho^a \rho_b = \rho^{a<b} \in T_r^>(D) \\ (\rho^a \rho^b) \psi &= (\rho^{a>b}) \psi = \rho_{a>b} = \\ &= \rho^a \rho^b = (\rho^a \psi)(\rho^b \psi), \\ (\rho^a(\rho^b \psi)) \psi &= (\rho^{a>b}) \psi = \\ &= (\rho^{a<b}) \psi = \rho_{a<b} = \rho_{a>b}, \\ \rho^a \rho^b \rho^c &= \rho^{(a>b)>c} = \rho^{(a<b)>c} = \\ &= \rho^{a<b} \rho^c = \rho^a \rho_b \rho^c = \rho^a(\rho^b \psi) \rho^c. \end{aligned}$$

Таким чином, $T_r^>(D)$ – є ψ -угоджена піднапівгрупа.

Лему доведено.

Дімоноїд $\mathfrak{S}(D \cup \{\varepsilon\})^\psi(T_r^>(D))$ назвемо дімоноїдом перетворень та позначимо його D^ψ .

Аналогом теореми Келі є наступна теорема.

Теорема 3. [30] Кожен дімоноїд $(D, <, >)$ ізоморфен дімоноїду перетворень D^ψ .

Доведення. Визначимо відображення

$$\gamma: (D, <, >) \rightarrow D^\psi: a \mapsto a\gamma = \rho^a.$$

Це відображення є сюр'єктивним за побудовою.

Якщо $a \neq b$, $a, b \in D$, то в силу $\varepsilon \rho^a = a \neq b = \varepsilon \rho^b$ виконується $a\gamma \neq b\gamma$.

Тереме доведено.

Отже, γ - ін'єктивне відображення.

Використовуючи леми 6, 7 і 8, маємо

$$(a < b)\gamma = \rho^{a < b} = \rho^a \rho_b = \rho^a (\rho^b \psi) = \rho^a \dashv \rho^b = a\gamma \dashv b\gamma,$$

$$(a > b)\gamma = \rho^{a > b} = \rho^a \rho^b = \rho^a \vdash \rho^b = a\gamma \vdash b\gamma$$

для всіх $a, b \in D$, звідси відображення γ – гомоморфізм. Таким чином γ – ізоморфізм.

Якщо операції дімоноїду $(D, <, >)$ збігаються, то, беручи до уваги теорему 3, отримуємо теорему Келі для напівгруп [34]. Використовуючи лему 7 і теорему 3, можна довести такі пропозиції.

Наслідок 1. [30] Напівгрупа $T_r^<(D)$ є гомоморфним образом дімоноїду $(D, <, >)$.

Нехай β — довільна фіксована конгруенція на $T_r^<(D)$. Визначмо, відношення $\tilde{\beta}$ на D^ψ за правилом

$$\rho^a \tilde{\beta} \rho^b \Leftrightarrow \rho_a \beta \rho_b \text{ для всіх } \rho^a, \rho^b \in D^\psi.$$

Наслідок 2. [30] Відношення $\tilde{\beta}$ є конгруенцією на дімоноїді D^ψ , і операції фактор-дімоноїда $D^\psi / \tilde{\beta}$ збігаються.

2.1.4. Найменша сепаративна конгруенція

Дімоноїд $(D, <, >)$ є сепаративним, якщо обидві напівгрупи $(D, <)$ та $(D, >)$ сепаративними. Якщо ρ – конгруенція на дімоноїді $(D, <, >)$, така що $(D, <, >)/\rho$ – сепаративний дімоноїд, то говорять, що ρ – сепаративна конгруенція. [33]

На дімоноїді $(D, <, >)$ з комутативною операцією $<$ визначимо відношення $\sigma: a\sigma b$, якщо існує таке $n \in N$, що

$$a < b^n = b^{n+1} \text{ і } b < a^n = a^{n+1}.$$

Теорема 4. [27] Відношення σ будь-якого дімоноїда $(D, <, >)$ із комутативною операцією $<$ є найменшою сепаративною конгруенцією, а $(D, <, >)/\sigma$ є комутативним сепаративним дімоноїдом, який є комутативною сепаративною напівгрупою.

Доведення. Відношення σ є конгруенцією на напівгрупі $(D, <)$ [16].

Покажемо, що σ стабільно відносно операції $>$.

Нехай $a\sigma b, a, b, c \in D$. Тоді $a < c\sigma b < c$. Отже, є $m \in N$, для котрого

$$(a < c) < (b < c)^m = (b < c)^{m+1}, \quad (2.25)$$

$$(b < c) < (a < c)^m = (a < c)^{m+1}. \quad (2.26)$$

Рівності (2.25) і (2.26) праворуч помножимо відповідно на $b < c$ і $a < c$ по операції $<$:

$$(a < c) < (b < c)^{m+1} = (b < c)^{m+2}, \quad (2.27)$$

$$(b < c) < (a < c)^{m+1} = (a < c)^{m+2}. \quad (2.28)$$

З рівності (2.27) отримуємо

$$\begin{aligned} (a < c) < (b < c)^{m+1} &= (b > c)^{m+1} < (a < c) = \\ &= ((b > c)^{m+1} < a) < c = (b > c)^{m+1} < (a > c) = \\ &= (a > c) < (b > c)^{m+1} = (b > c)^{m+2} \end{aligned}$$

в силу комутативності операції $<$, леми 1 та аксіом (2.3) та (2.4) дімоноїда.

Аналогічно з рівності (2.28) випливає

$$(b > c) < (a > c)^{m+1} = (a > c)^{m+2}.$$

Це разом із попереднім означає, що $a > c\sigma b > c$.

Аналогічно доводиться ліва стабільність відношення σ щодо операції $>$.

Таким чином, σ – конгруенція на $(D, <, >)$. Вочевидь, що $(D, <)/\rho$ – комутативна напівгрупа. З [29] слідує, що $(D, <)/\sigma$ є сепаративною напівгрупою.

Згідно леми 1 виконується

$$\begin{aligned} (a < b) < (a > b)^{n+1} &= (a < b) < (a < b)^{n+1} = \\ &= (a < b)^{n+2} = (a > b)^{n+2}, \\ (a > b) < (a < b)^{n+1} &= (a > b) < (a > b)^{n+1} = \\ &= (a > b)^{n+2} = (a < b)^{n+2} \end{aligned}$$

для $\forall a, b \in D, n \in N$, тоді $a < b\sigma a > b$, з чого випливає, що операції фактор-дімоноїда $(D, <, >)/\sigma$ збігаються.

Отже, $(D, <, >)/\sigma$ — комутативна сепаративна напівгрупа.

Таким чином, $(D, <, >)/\sigma$ є комутативним сепаративним дімоноїдом, який є комутативною сепаративною напівгрупою, а σ є сепаративною конгруенцією та σ є найменшою сепаративною конгруенцією [34].

Теорему доведено.

Якщо припустити, що операції дімоноїда з комутативною операцією збігаються, то з теореми 2 випливає теорема [16] про будову найменшої сепаративної конгруенції на комутативній напівгрупі.

У [19] побудований вільний дімоноїд, породжений заданою множиною. Вільний комутативний дімоноїд побудований в [17].

Охарактеризуємо найменшу сепаративну конгруенцію σ на вільному комутативному дімоноїді.

Розглянемо визначення конструкції вільного комутативного дімоноїду.

Нехай A – алфавіт, $F[A]$ – вільна комутативна напівгрупа над A , G – множина неупорядкованих пар $(p, q), p, q \in A$. Визначимо операції $< i >$ на множині $F[A] \cup G$ за правилами

$$\begin{aligned} a_1 \dots a_m < b_1 \dots b_n &= a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n, \\ a_1 \dots a_m > b_1 \dots b_n &= \begin{cases} a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n, & \text{якщо } mn > 1, \\ (a_1, b_1), & \text{якщо } m = n = 1, \end{cases} \\ a_1 \dots a_m < (p, q) &= a_1 \dots a_m > (p, q) = a_1 \dots a_m pq, \\ (p, q) < a_1 \dots a_m &= (p, q) > a_1 \dots a_m = pqa_1 \dots a_m, \\ (p, q) < (r, s) &= (p, q) > (r, s) = pqr s \end{aligned}$$

для всіх $a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n \in F[A], (p, q), (r, s) \in G$.

Безпосередня перевірка показує, щодо операцій $<, >$ аксіоми дімоноїда виконуються і, таким чином, $(F[A] \cup G, <, >)$ – дімоноїд.

Операції $<, >$ теж комутативні, а $(F[A] \cup G, <, >)$ – вільний комутативний дімоноїд [15].

Напівгрупи $(F[A] \cup G, <)$ і $(F[A] \cup G, >)$ не є сепаративними, так як з $(p, q) < (p, q) = p, q > (p, q) = pqrq = pq > pq = pq < pq$ не слід, що $(p, q) = pq$, тобто $(F[A] \cup G, <, >)$ – не сепаративний дімоноїд.

Для всіх $x \in A, w \in F[A]$ кількість з'явлень елемента x в w позначимо через $d_x(w)$. Для всіх $(p, q) \in G$ вважаємо, що

$$d_p((p, q)) = d_p((q, p)) = d_q((p, q)) = d_q((q, p)) = 1 \text{ при } p \neq q, \\ d_p((p, p)) = d_q((q, q)) = 2 \text{ і } d_x((p, q)) = 0 \text{ при } q \neq x \neq p.$$

Теорема 5. [30] Для $\forall a, b \in (F[A] \cup G, <, >)$ має місце еквівалентність

$$a \sigma b \Leftrightarrow d_x(a) = d_x(b)$$

для всіх $x \in A$. При цьому $(F[A] \cup G, <, >)/\sigma$ є вільною комутативною напівгрупою.

Доведення. Перша частина теореми випливає з теореми 2.

Елемент $pq \in F[A]$ вважатимемо представником класу конгруенції σ , який містить елемент $(p, q) \in G$.

Таким чином, усі представники класу конгруенції σ належать $F[A]$. Через $[w]$ позначимо клас конгруенції σ , представником якого є елемент $w \in F[A]$.

Нехай $A = \{x_i \mid i \in I\}$, N^0 – адитивна напівгрупа додатніх цілих чисел з нулем, $N_i^0 = N^0$ для всіх $i \in I$.

Через $\tilde{0}$ позначимо одиницю напівгрупи $\prod_{i \in I} N_i^0$. Безпосередньо перевіряється, що відображення

$$\alpha : [w] \rightarrow [w]\alpha,$$

де i -а компонента елемента $[w]\alpha$ рівна $d_{x_i}(w)$, $i \in I$, є ізоморфізмом напівгрупи $(F[A] \cup G, <, >)/\sigma$ на вільну комутативну напівгрупу $\prod_{i \in I} N_i^0 \{\tilde{0}\}$.

Теорему доведено.

2.1.5. Вільні дімоноїди

Нехай X – довільна непорожня множина, $n \in N$, де N позначимо множину додатніх цілих чисел. Через Y_n позначимо об'єднання n різних копій

множини X^n та покладемо $D(X) = \bigcup_{n \geq 1} Y_n$. Позначаючи через $(x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_n)$ елемент в i -й компоненті Y_n , на множині $D(X)$ визначимо операції:

$$(x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_k) < (x_{k+1} \dots \tilde{x}_j \dots x_l) = (x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_l),$$

$$(x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_k) > (x_{k+1} \dots \tilde{x}_j \dots x_l) = (x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_l)$$

для всіх $(x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_k) > (x_{k+1} \dots \tilde{x}_j \dots x_l) \in D(X)$. Тоді $((D(X), <, >))$ є вільним дімоноїдом над множиною X [2].

Вільний дімоноїд однозначно з точністю до ізоморфізму визначається потужністю множини X [17]. Інша конструкція вільного дімоноїда над множиною X є наступна.

Нехай $F[X]$ – вільна напівгрупа з вільною базою $[X]$. Символом l_w позначатимемо довжину слова $w \in F[X]$, на множині

$$F = \{(w, m) \in F[X] \times \mathbb{N} \mid l_w \geq m\}$$

Визначимо операції $<, >$ за правилами

$$(w_1, m_1) < (w_2, m_2) = (w_1 w_2, m_1) \quad (2.29)$$

$$(w_1, m_1) > (w_2, m_2) = (w_1 w_2 l_{w_1}, m_1) \quad (2.30)$$

для всіх $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in F$.

Лема 9. [30] Множина F з діями $<, >$, що визначаються умовами (2.29), (2.30), є дімоноїдом.

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що $(F, <, >)$ є дімоноїдом. Дімоноїд отриманий таким способом позначають через $\check{F}[X]$.

Лемі доведено.

Лема 10. [30] Дімоноїди $(D(X), <, >)$ та $(\check{F}[X])$ є ізоморфними.

Доведення. Визначимо відображення $\sigma: D(X) \rightarrow \check{F}[X]$ таким чином:

$$(x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_k) \rightarrow (x_1 \dots x_i \dots x_k i), (x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_k) \in D(X).$$

σ є гомоморфізм, так як для довільних $(x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_k), (y_1 \dots \tilde{y}_j \dots x_l) \in D(X)$ маємо:

$$\begin{aligned} ((x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_k) < (y_1 \dots \tilde{y}_j \dots x_l)) \sigma &= \\ &= (x_1 \dots \tilde{x}_l \dots x_k y_1 \dots y_j \dots x_l) \sigma = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 \dots x_i \dots x_k y_1 \dots y_j \dots y_l, i) = \\
&= (x_1 \dots x_i \dots x_k i) < (y_1 \dots y_j \dots y_l, j) = \\
&= (x_1 \dots \check{x}_i \dots x_k) \sigma < (y_1 \dots \check{y}_j \dots x_l) \sigma, \\
&((x_1 \dots \tilde{x}_i \dots x_k) > (y_1 \dots \check{y}_j \dots x_l)) \sigma = \\
&= (x_1 \dots x_i \dots x_k y_1 \dots \check{y}_j)(y_1 \dots \check{y}_j \dots x_l) \sigma = \\
&= (x_1 \dots x_i \dots x_k y_1 \dots y_j \dots y_l k + j) = \\
&= (x_1 \dots x_i \dots x_k y_1 \dots y_j \dots y_l, l_{x_1 \dots x_i \dots x_k} + j) = \\
&(x_1 \dots \check{x}_i \dots x_k, i) \sigma > (y_1 \dots y_j \dots y_l, j) = \\
&= (x_1 \dots \check{x}_i \dots x_k) \sigma > (y_1 \dots \check{y}_j \dots x_l) \sigma,
\end{aligned}$$

Тобто σ є узгодженим з діями $<, >$. За побудовою σ є бієктивним відображенням.

Лему доведено.

Побудуємо дімоноїд, ізоморфний вільному дімоноїду рангу 1.

Нехай $\bar{N} = \{(m, n) \in N \times N \mid m \geq n\}$. На множині \bar{N} визначимо операції $<, >$ за правилами

$$(m, n) < (k, l) = (m + k, n), \quad (2.31)$$

$$(m, n) > (k, l) = (m + k, m + l) \quad (2.32)$$

для всіх $(m, n), (k, l) \in \bar{N}$. Безпосередня перевірка показує, що $(\bar{N}, <, >)$ дімоноїдом.

Лема 11. [30] Якщо $|X|=1$, то $\bar{F}[X] \cong (\bar{N}, <, >)$.

Доведення. Нехай $X = \{a\}$. Визначимо відображення

$$\tau: \bar{F}[X] \rightarrow (\bar{N}, <, >),$$

поклавши $(a^k, l)\tau = (k, l)$. За побудовою τ є бієктивним відображенням та гомоморфізмом. Для всіх $(a^k, l), (a^t, s) \in \bar{F}[X]$ маємо

$$\begin{aligned}
&((a^k, l) < (a^t, s))\tau = (a^{k+t}, l)\tau = (k + t, l) = \\
&= (k, l) < (t, s) = (a^k, l)\tau = (k + t, l), \\
&\left((a^k, l) > (a^t, s)\right)\tau = (a^{k+t}, l_{a^k} + s)\tau = (a^{k+t}, k + s)\tau = \\
&= (k + t, k + s) = (k, l) > (t, s) = (a^k, l)\tau > (a^t, s)\tau.
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Для кожного $w \in F[X]$ через $c(w)$ позначимо множину елементів $x \in X$, які входять до запису елемента w . Відомо, що $C_Y = \{(w, m) \in \check{F}[X] | c(w) = Y\}$ для кожної непорожньої скінченної множини $Y \subseteq X$. $(C_Y, <, >), Y \subseteq X$ є піддімоною дімоною $\check{F}[X]$.

Теорема 6. [30] Для будь-яких $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in \check{F}[X]$ має місце еквівалентність.

$$(w_1, m_1), \Omega_{<} (w_2, m_2) \Leftrightarrow c(w_1) = c(w_2).$$

Відношення $\Omega_{<}$ на будь-якому дімоноіді $(D, <, >)$ є найменшою напівструктурною конгруенцією. Кожний клас конгруенції $\Omega_{<}$ є s -простим дімоноїдом [13].

Доведення. Необхідність. Нехай $(w_1, m_1), \Omega_{<} (w_2, m_2)$ для деяких $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in \check{F}[X]$, що означає

$$\begin{aligned} & \{((w_3, m_3), (w_4, m_4)) | (w_1, m_3) < (w_1, m_1) < (w_4, m_4) \in T\} = \\ & = \{((w_3, m_3), (w_4, m_4)) | (w_3, m_3) < (w_2, m_2) < (w_4, m_4) \in T\} \end{aligned}$$

для кожної P -піднапівгрупи $T \in \Omega$ напівгрупи $(F, <)$.

Нехай $(C_Y, <, >)$ піддімоноїд, де $Y = c(w_1)$, дімоноїда $\check{F}[X]$.

Покажемо, що $((C_{c(w_1)}, <))$ – P -піднапівгрупа напівгрупи $(F, <)$.

Якщо

$$(w_1, s_1) < (w_1, s_1) < \dots < (w_k, s_k) = (w_1 w_2 \dots w_k, s_1) \in C_{c(w_1)}$$

для деяких

$$(w_1, s_1), (w_2, s_2) < \dots < (w_k, s_k) \in \check{F}[X] \text{ та}$$

$$(u_1, t_1) < (u_2, t_2) < \dots < (u_r, t_r) = (u_1 u_2 \dots u_r, t_1) \in \check{F}[X].$$

Для деяких

$$(u_1, t_1), (u_2, t_2), \dots, (u_r, t_r) \in \check{F}[X] \text{ таких, що}$$

$$\{(u_1, t_1), (u_2, t_2), \dots, (u_r, t_r)\} = \{(w_1, s_1), (w_1, s_1), \dots, (w_k, s_k)\},$$

з останньої рівності випливає, що $c(u_1 u_2 \dots u_r) = c(w_1 w_2 \dots w_k)$. Але

$c(w_1 w_2 \dots w_k) = c(w_1)$. Звідси $c(u_1 u_2 \dots u_r) = c(w_1)$ і отже, $(u_1 u_2 \dots u_r, t_1) \in C_{c(w_1)}$, а $(C_{c(w_1)}, <))$ – P -піднапівгрупа.

Якщо $c(w_1) \neq c(w_2)$, тоді з

$$(w_3, m_3) < (w_1, m_1) < (w_4, m_4) = (w_3 w_1 w_4, m_3) \in C_{c(w_1)}$$

не випливає

$$(w_3, m_3) < (w_2, m_2) < (w_4, m_4) = (w_3 w_2 w_4, m_3) \in C_{c(w_1)},$$

оскільки

$$\begin{aligned} &= c(w_3 w_2 w_4, m_3) = c(w_3) \cup c(w_2) \cup c(w_4) \neq \\ &\neq c(w_3) \cup c(w_1) \cup c(w_4) = c(w_3 w_1 w_4) = c(w_1). \end{aligned}$$

Отже, це суперечність, тобто припущення, що $c(w_1) = c(w_2)$ невірне.

Таким чином, $(w_1, m_1) \Omega_{<} (w_2, m_2) \Rightarrow c(w_1) = c(w_2)$.

Достатність. Нехай T – довільна P -піднапівгрупа напівгрупи $(F, <)$ та $(w_1, m_1), (w_2, m_2), (w_3, m_3), (w_4, m_4) \in \check{F}[X]$.

Припустимо, що $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in C_Y$ для деякої непорожньої скінченної підмножини $Y \subseteq X$.

Нехай

$$\begin{aligned} w_1 &= a_1 \dots a_i \dots a_t, a_i \in X, 1 \leq i \leq t, t \geq m_1, w_2 = b_1 \dots b_i \dots b_r, b_i \in X, \\ 1 \leq i \leq r, r \geq m_2, \text{ звідси } c(w_1) &= c(w_2). \end{aligned}$$

Тепер припустимо, що $(w_1, m_1), < (w_4, m_4) \in T$ згідно з P -властивістю напівгрупи T рівності

$$\begin{aligned} &(w_3, m_3), < (w_1, m_1), < (w_4, m_4) = \\ &= (w_3, m_3) < (a_1, 1) < \dots < (a_i, 1) < \dots (a_t, 1) < (w_4, m_4) \end{aligned}$$

випливає, що

$$= (w_3, m_3) < (b_1, 1) < \dots < (b_i, 1) < \dots < (b_r, 1) < (w_4, m_4) \in T.$$

Але

$$\begin{aligned} &(w_3, m_3) < (b_1, 1) < \dots < (b_i, 1) < \dots < (b_r, 1) < (w_4, m_4) = \\ &(w_3, m_3) < (b_1 \dots b_i \dots b_r, 1) < (w_4, m_4) = \\ &= (w_3, m_3), < (w_2, m_2), < (w_4, m_4). \end{aligned}$$

Отже, з умови $(w_3, m_3), < (w_1, m_1), < (w_4, m_4) \in T$ випливає, що

$$(w_3, m_3), < (w_2, m_2), < (w_4, m_4) \in T.$$

Аналогічно доводиться імплікація

$$\begin{aligned} (w_3, m_3), < (w_2, m_2), < (w_4, m_4) \in T \Rightarrow \\ \Rightarrow (w_3, m_3), < (w_1, m_1), < (w_4, m_4) \in T. \end{aligned}$$

Таким чином, за означенням $(w_1, m_1)\Omega_{<}(w_2, m_2)$.

Теорему доведено.

2.2. Дігрупи

Цей розділ присвячений вивченню питань дігруп і узагальнених дігруп. Дослідженню даної проблеми алгебри присвятили свої праці провідні вчені-математики, зокрема Жучок А.В. [27], Жучок Ю.В. та Пілц Г.Ф. [25], Кінйон М.К. [13], Родрігес-Нето Дж. Дж., Селезар-Діаз О.П. та Веласквес Р. [23], Жанг Г. та Чен У. [26] та інші науковці.

2.2.1. Аксиоми дігрупи

Алгебраїчна система (D, \dashv, \vdash) з двома бінарними асоціативними операціями \dashv і \vdash називається дігрупою, якщо для всіх $x, y, z \in D$ виконуються наступні аксиоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (2.33)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (2.34)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (2.35)$$

$$\exists e \in D \text{ такий, що } \forall x \in D, e \vdash x = x = \dashv e, \quad (2.36)$$

$\forall x \in D$ є унікальний, існує єдиний елемент $x^{-1} \in D$ такий, що $x \vdash x^{-1} = e = x^{-1} \dashv x$. (2.37)

Елемент e називається бар-одиноцею дігрупи (D, \dashv, \vdash) і x^{-1} називається оберненим до x відносно e .

Слід зазначити, що це визначення не означає, що e є єдиною бар-одиноцею дігрупи (D, \dashv, \vdash) . Загалом дігрупа може мати багато бар-одиноць.

Якщо операції дігрупи збігаються, дігрупа стає групою. Одним з перших результатів про дігрупи є доказ того, що теорема Келі для груп має аналог в класі всіх дігруп [19]. М. К. Кінйон модифікував термінологію Лоде, щоб дати більш чітке визначення дігрупи, а потім використовував теорію напівгруп, щоб показати, що кожна дігрупа є добутком групи та тривіальної дігрупи [16].

Ще більш простий базис незалежних аксіом многовиду дігруп було отримано Дж. Д. Філіпсом [21].

Відомо, що поняття дігрупи тісно пов'язані з поняттям дімоноїда [19].

2.2.2. Вільна абелева моногенна дігрупа

Дігрупа (D, \dashv, \vdash) називається абелевою, якщо $x \dashv y = y \vdash x$ для $\forall x, y \in D$. Дігрупа, що породжена одним елементом, називається моногенною.

Припустимо, що G довільна абелева адитивна група, а X_1, X_2, \dots, X_{n-1} непусті підмножини G , та $X_n = G$ ($n \geq 2$). Позначимо через $\prod_{i=1}^n X_i$ добуток $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ і встановимо що, $x^+ = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ для усіх $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$.

Візьмемо $\forall x, y \in \prod_{i=1}^n X_i$ та визначимо дві бінарні операції \dashv і \vdash на $\prod_{i=1}^n X_i$ наступним чином:

$$x \dashv y = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + y^+), \quad (2.38)$$

$$x \vdash y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n + x^+). \quad (2.39)$$

Твердження 1. [33] Алгебраїчна система $(\prod_{i=1}^n X_i, \dashv, \vdash)$ є абелевою дігрупою.

Доведення. Нехай $x, y, z \in \prod_{i=1}^n X_i$, тоді

$$\begin{aligned} (x \dashv y) \dashv z &= (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + y^+) \dashv (z_1, z_2, \dots, z_n) = \\ &= (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + y^+ + z^+) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \dashv (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + z^+) = \\ &= x \dashv (y \dashv z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \vdash y) \vdash z &= (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + x^+) \vdash (z_1, z_2, \dots, z_n) = \\ &= (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n + y^+ + x^+) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \vdash (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n + y^+) = \end{aligned}$$

$$= x \vdash (y \vdash z).$$

Таким чином операції \dashv і \vdash є асоціативними. Також виконуються аксіоми (2.33) – (2.35):

$$\begin{aligned} (x \dashv y) \dashv z &= (x_1, \dots, x_{n-1}, +x_n + y^+ + z^+) = \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \dashv (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n + y^+) = x \dashv (y \vdash z), \\ (x \vdash y) \dashv z &= (y_1, \dots, y_{n-1}, +y_n + x^+) \dashv (z_1, z_2, \dots, z_n) = \\ &= (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + x^+ + z^+) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \vdash (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + z^+) = \\ &= x \vdash (y \dashv z), \\ (x \dashv y) \vdash z &= (x_1, \dots, x_{n-1}, +x_n + y^+) \vdash (z_1, z_2, \dots, z_n) = \\ &= (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n + y^+ + x^+) = x \vdash (y \vdash z). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $(\prod_{i=1}^n X_i, \dashv, \vdash)$ – дімоноїд.

Нехай e – довільна бар-одиниця $(\prod_{i=1}^n X_i, \dashv, \vdash)$, тоді для всіх $x \in \prod_{i=1}^n X_i$
 $e \vdash x = (x_1, \dots, x_{n-1}, +x_n + e^+) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x \dashv e$.

Звідси випливає, що $e^+ = 0$. Тобто, якщо $e \in \prod_{i=1}^n X_i$ і $e^+ = 0$, то e – бар-одиниця $(\prod_{i=1}^n X_i, \dashv, \vdash)$.

Зафіксуємо бар-одиницю на $(\prod_{i=1}^n X_i, \dashv, \vdash)$ і припустимо, що для деякого $x \in \prod_{i=1}^n X_i$ існує $x^{-1} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in (\prod_{i=1}^n X_i)$ такої, що $x \vdash x^{-1} = (y_1, \dots, y_{n-1}, +y_n + x^+) = (e_1, e_2, \dots, e_n) = x^{-1} \dashv x$.

Звідси $x^{-1} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n - x^+)$. Крім того, x^{-1} є єдиним оберненим елементом до x відносно e , а $(\prod_{i=1}^n X_i, \dashv, \vdash)$ – дігрупою.

Нарешті, $x \dashv y = (x_1, \dots, x_{n-1}, +x_n + y^+) = y \vdash z$ для усіх $x, y \in \prod_{i=1}^n X_i$.

Твердження доведено.

Нехай N – множина всіх натуральних чисел, $N^0 = N \cup \{0\}$ і $E = \{1, -1\}$.

Позначимо $(Z, +)$ адитивну групу всіх цілих чисел. Згідно з твердженням 1, алгебраїчна система $(E \times Z, \dashv, \vdash)$ є абелевою дігрупою. Бар-одиницями $(E \times Z, \dashv, \vdash) \in (1, -1)$ і $(-1, 1)$. Для кожного елемента x довільної дігрупи (D, \dashv, \vdash) використовуємо наступні позначення:

$x_{\vdash}^n = x \vdash x \vdash \dots \vdash x$ усього (x^n) елементів, $x_{\dashv}^n = x \dashv x \dashv \dots \dashv x$ усього x - n елементів ($n \in N$).

Лема 12. [33] Кожен з елементів множини $\{(1, 0)\}, \{(-1, 0)\}$ є твірним для дігрупи $(E \times Z, \dashv, \vdash)$.

Доведення: $\{(1, 0)\}$ є твірним множиною $(E \times Z, \dashv, \vdash)$. Візьмемо бар-одиницю $(-1, 1)$ як діючим дію нульової операції на $(E \times Z, \dashv, \vdash)$.

Зауважимо, що $(-1, 0)$ є оберненим до $(1, 0)$ відносно $(-1, 1)$. Для всіх $n \in N^0$:

$$(1, 0)_{\vdash}^{n+1} = (1, n) = (1, 0)_{\dashv}^{n+1}, (-1, 0)_{\vdash}^{n+1} = (-1, -n) = (-1, 0)_{\dashv}^{n+1},$$

тоді для всіх $n \in N^0$ отримуємо:

$$(1, 0) \dashv (-1, -n) = (1, -1 - n), \quad (2.40)$$

$$(-1, 0) \dashv (1, n) = (-1, 1 + n). \quad (2.41)$$

Отже, $\langle (1, 0) \rangle = E \times Z$. Аналогічно можна довести, що $\{(-1, 0)\}$ є твірною множиною дігрупи $(E \times Z, \dashv, \vdash)$.

Лему доведено.

З леми 1 випливає наступний наслідок: нехай $(i, 0)_{\dashv}^0$ є фіксованою бар-одиницею $(E \times Z, \dashv, \vdash)$ для всіх $i \in E$. Кожен елемент (a, m) $(E \times Z, \dashv, \vdash)$ можна однозначно представити як $(a, m) = (a, 0) \dashv (i, 0)_{\dashv}^m$ для відповідного $i \in E$.

Для кожного елемента x абелевої дігрупи (D, \dashv, \vdash) маємо $x_{\vdash}^n = x_{\dashv}^n$ для всіх $n \in N$. Тому для абелевих дігруп D, \dashv, \vdash замість x_{\vdash}^n пишемо x^n .

Зауваження 1. [33] Для абелевих дігруп тотожність $x^m \dashv x^n = x^{m+n}$ не виконується для цілих чисел m, n .

Для виконання цієї тотожності достатньо, щоб обидві її сторони мали один спільний множник ліворуч або праворуч відносно операції \dashv або відносно операції \vdash .

Наприклад, візьмемо дігрупу $(E \times Z, \dashv, \vdash)$, $x = (1, 0) \in E \times Z$ і $m = 2, n = -4$. Тоді відносно бар-одиниці $(-1, 1)$ маємо

$x^{m+n} = (1,0)^{-2} = (-1, -1) \neq (1, -3) = (1,0)^2 \dashv (1,0)^{-4} = x^m \dashv x^n$, проте для всіх $(a, b) \in E \times Z$, $(a, b) \dashv x^{m+n} = (a, b - 2) = (a, b) \dashv x^m \dashv x^n$.

Для довільних дігруп $\mathcal{D}_1 = (D_1, \dashv, \vdash)$ і $\mathcal{D}_2 = (D_2, \dashv, \vdash)$ відображення $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$ називається гомоморфізмом \mathcal{D}_1 в \mathcal{D}_2 , якщо для всіх $x, y \in D_1$ маємо $(x \dashv_1 y)\varphi = x\varphi \dashv_2 x\varphi$, $(x \vdash_1 y)\varphi = x\varphi \vdash_2 y\varphi$.

Бієктивний гомоморфізм $\varphi: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ називається ізоморфізмом \mathcal{D}_1 у \mathcal{D}_2 . У цьому випадку дігрупи \mathcal{D}_1 і \mathcal{D}_2 називаються ізоморфними.

Теорема 7. [33] Дігрупа $(E \times Z, \dashv, \vdash)$ – вільна абелева моногенна дігрупа.

Доведення. Нехай (D', \dashv', \vdash') – довільна абелева дігрупа, $(1,0)\xi = t \in D'$ і $(-1,0)\xi = t^{-1}$, де t^{-1} є оберненим до t відносно до фіксованої бар-одиниці $e' \in D'$.

Крім того, ми природним чином розширюємо ξ до відображення $\Xi: E \times Z$ у D' , використовуючи той факт, що $\{(1, 0)\}$ є генеруючою множиною для $E \times Z, \dashv, \vdash$ і $(1,0)^{-1} = (-1,0)$ (Лема 1), тобто $(a, m)\Xi = ((a, 0) \dashv (i, 0)^m)\Xi = t^a \dashv' t^{|m|} = t^a \dashv' t^m$ для всіх $(a, m) \in E \times Z$.

Припустимо, що $((a, m) \dashv (b, n))\Xi \in E \times Z$.

Враховуючи зауваження 1, отримаємо

$$\begin{aligned} ((a, m) \dashv (b, n))\Xi &= (a, m + b + n)\Xi = t^a \dashv' t^{m+b+n} = t^a \dashv' (t^m \dashv' t^b \dashv' t^n) \\ &= (t^a \dashv' t^m) \dashv' (t^b \dashv' t^n) = (a, m)\Xi \dashv' (b, n)\Xi. \end{aligned}$$

Таким чином, Ξ є гомоморфізмом $(E \times Z, \dashv, \vdash)$ у (D, \dashv', \vdash') . Крім того, $(E \times Z)\Xi$ породжується одним елементом t .

Теорему доведено.

2.2.3. Ендоморфізми вільної абелевої дігрупи рангу 1.

Для довільної дігрупи $\mathfrak{D} = (D, \neg, \vdash)$ через $End(\mathfrak{D})$ позначимо моноїд ендоморфізмів \mathfrak{D} . Спочатку опишемо всі ендоморфізми вільної абелевої моногенної дігрупи.

Лема 13. [33] Нехай e – фіксована бар-одиниця вільної абелевої дігрупи $(E \times \mathbb{Z}, \neg, \vdash)$ і $t \in E \times \mathbb{Z}$. Перетворення $\xi_{e,t}(E \times \mathbb{Z}, \neg, \vdash)$, визначене як

$$(a, n)\xi_{e,t} = \begin{cases} (t_1, nt^+ + t_2), & \text{якщо } a = 1, \\ (e_1, (n-1)t^+ + e_2), & \text{якщо } a = -1 \end{cases} \quad (2.42)$$

є ендоморфізмом.

Доведення. Для всіх $(a, n), (a', n') \in E \times \mathbb{Z}$ маємо такі випадки:

1) $a = a' = 1$, тоді

$$\begin{aligned} ((1, n) \neg (1, n'))\xi_{e,t} &= (1, n+1, +n')\xi_{e,t} = (t_1, (n+1+n')t^+ + t_2) = \\ &= (t_1, nt^+ + t_2) \neg (t_1, n't^+ + t_2) = (1, n)\xi_{e,t} \neg (1, n')\xi_{e,t}; \end{aligned}$$

2) $a = 1, a' = -1$, тоді

$$\begin{aligned} ((1, n) \neg (-1, n'))\xi_{e,t} &= (1, n-1, +n')\xi_{e,t} = (t_1, (n-1+n')t^+ + t_2) = \\ &= (t_1, nt^+ + t_2) \neg (e_1, (n'-1)t^+ + e_2) = (1, n)\xi_{e,t} \neg (-1, n')\xi_{e,t}; \end{aligned}$$

3) $a = -1, a' = 1$, тоді

$$\begin{aligned} ((-1, n) \neg (1, n'))\xi_{e,t} &= (-1, n+1, +n')\xi_{e,t} = (e_1, (n+n')t^+ + e_2) = \\ &= (e_1, (n-1)t^+ + e_2) \neg (t_1, n't^+ + t_2) = (-1, n)\xi_{e,t} \neg (1, n')\xi_{e,t}; \end{aligned}$$

4) $a = a' = -1$, тоді

$$\begin{aligned} ((-1, n) \neg (-1, n'))\xi_{e,t} &= (-1, n-1, +n')\xi_{e,t} = (e_1, (n+n'-2)t^+ + e_2) = \\ &= (e_1, (n-1)t^+ + e_2) \neg (e_1, (n'-1)t^+ + e_2) = (-1, n)\xi_{e,t} \neg (-1, n')\xi_{e,t}. \end{aligned}$$

З пунктів 1)–4) випливає, що $\xi_{e,t} \in End(E \times \mathbb{Z}, \neg)$.

Оскільки $(E \times \mathbb{Z}, \neg, \vdash)$ є абелевою дігрупою, $\xi_{e,t} \in End(E \times \mathbb{Z}, \neg, \vdash)$ для всіх $e, t \in E \times \mathbb{Z}, e^2 = e$.

Ендоморфізми $\xi_{e,t}, e, t \in E \times \mathbb{Z}$, де $e^+ = 0$, загалом не є ін'єктивними. Наприклад, якщо $e = t, e^2 = e$ ми маємо $x\xi_{e,t} = e$ для всіх $x \in E \times \mathbb{Z}$.

Лему доведено.

Лема 14. [33] Нехай $x = (x_1, x_2) \in E \times \mathbb{Z}$ і $m \in \mathbb{N}$, тоді $x^m = (x_1, x_2 + (m-1)x^+)$.

Лема 15. [33] Нехай ξ — довільний ендоморфізм $(E \times Z, \dashv, \vdash)$ і $(1, 0)\xi = t$. Тоді $\xi = \xi_{e,t}$ для деякої бар-одиниці $e \in E \times Z$.

Доведення. Припустимо, що $(-1, 1)\xi = e$. Тоді $e^2 = e$, тобто e це бар-одиниця $(E \times Z, \dashv, \vdash)$.

Отже, існує єдиний обернений елемент $t^{-1} = (e_1, e_2 - t^+)$ до t відносно e . За наслідком зауваження 1 для всіх $(a, n) \in E \times Z$, $(a, n) = (a, 0) \dashv (j, 0)^n$ для $j \in E$. Використовуючи лему 3, отримуємо такі випадки:

1) $n \geq 0, a = 1$, тоді

$$(1, n)\xi = ((1, 0)^{n+1})\xi = t^{n+1} = (t_1, t_2 + nt^+);$$

2) $-n < 0, a = 1$, тоді

$$\begin{aligned} (1, -n)\xi &= ((1, 0) \dashv (-1, 0)^n)\xi = t \dashv t^{-n} = \\ &= (t_1, t_2) \dashv (e_1, e_2 - t^+ + (n-1)(e^+ - t^+)) = (t_1, t_2 - nt^+); \end{aligned}$$

3) $n \geq 0, a = -1$, тоді

$$\begin{aligned} (-1, n)\xi &= ((-1, 0) \dashv (1, 0)^n)\xi = t^{-1} \dashv t^n = \\ &= (e_1, e_2 - t^+) \dashv (t_1, t_2 + (n-1)t^+) = (e_1, e_2 + (n-1)t^+); \end{aligned}$$

4) $-n < 0, a = -1$, тоді

$$\begin{aligned} (-1, -n)\xi &= (-1, 0)^{n+1}\xi = (e_1, e_2 - t^+)^{n+1} = (e_1, e_2 - t^+ + n(e^+ - t^+)) = \\ &= (e_1, e_2 - (n+1)t^+). \end{aligned}$$

З 1)-4) випливає, що ξ збігається з $\xi_{e,t}$ (див. Лему 2), де $e = (-1, 1)\xi$.

Лему доведено.

Нехай W — множина всіх бар-одиниць $(E \times Z, \dashv, \vdash)$, тобто $W = \{(1, -1), (-1, 1)\}$. Розглянемо бінарну операцію \circ на $W \times (E \times Z)$, визначену наступним чином:

$$(e, t) \circ (i, s) \begin{cases} ((s_1, -s_1), (s_1, t_2 s^+ + s_2)), & \text{якщо } e_1 = t_1 = 1, \\ ((s_1, -s_1), (i_1, t^+ s^+ - i_1)), & \text{якщо } e_1 = 1, t_1 = -1, \\ ((i_1, -i_1), (s_1, t_2 s^+ + s_2)), & \text{якщо } e_1 = -1, t_1 = 1, \\ ((i_1, -i_1), (i_1, t^+ s^+ - i_1)), & \text{якщо } e_1 = t_1 = -1. \end{cases} \quad (2.43)$$

Операція \circ є коректно визначена на $W \times (E \times Z)$.

Лема 16. [33] Алгебра $(W \times (E \times \mathbb{Z}), \circ)$ є моноїдом з одиницею $((-1, 1), (1, 0))$.

Доведення. Візьмемо довільні $(e, t), (i, s), (j, r) \in W \times (E \times \mathbb{Z})$ і покладемо $A = ((e, t) \circ (i, s)) \circ (j, r), B = (e, t) \circ ((i, s) \circ (j, r))$.

Припустимо, що $e_1 = t_1 = i_1 = s_1 = 1$, тоді

$$\begin{aligned} A &= ((s_1, -s_1), (s_1, t_2 s^+ + s_2)) \circ (j, r) = ((r_1, -r_1), (r_1, t_2 s^+ r^+ + s_2 r^+ + \\ &\quad + r_2)) = ((r_1, -r_1), (r_1, t_2(r^+ + s_2 r^+) + s_2 r^+ + r_2) = (e, t) \circ \\ &\quad ((r_1, -r_1), (r_1, s_2 r^+ + r_2)) = B. \end{aligned}$$

Для $e_1 = t_1 = i_1 = s_1 = -1$ маємо:

$$\begin{aligned} A &= ((i_1, -i_1), (i_1, t^+ s^+ - i_1)) \circ (j, r) = ((j_1, -j_1), (j_1, t^+ s^+ r^+ - j_1)) = \\ &= (e, t) \circ ((j_1, -j_1), (j_1, s^+ r^+ - j_1)) = B. \end{aligned}$$

Для $e_1 = j_1 = 1, t_1 = s_1 = -1$ маємо:

$$\begin{aligned} A &= ((s_1, -s_1), (i_1 t^+ s^+ - i_1)) \circ (j, r) = ((j_1, -j_1), (r_1, r_2 + (t^+ s^+ - i_1) r^+)) = \\ &= ((j_1, -j_1), (r_1, t^+ s^+ r^+ - r_1)) = (e, t) \circ ((r_1, -r_1), (j_1, s^+ r^+ - j_1)) = B. \end{aligned}$$

Для $e_1 = i_1 = -1, t_1 = s_1 = 1$ маємо:

$$\begin{aligned} A &= ((i_1, -i_1), (s_1, t_2 s^+ + s_2)) \circ (j, r) = ((j_1, -j_1), (r_1, t_2 s^+ r^+ + s_2 r^+ + r_2)) = \\ &= ((j_1, -j_1), (r_1, t_2(r^+ + s_2 r^+ + r_2))) = (e, t) \circ ((j_1, -j_1), (r_1, s_2 r^+ + r_2)) = B. \end{aligned}$$

Всі інші випадки доводяться аналогічно. Таким чином, $(W \times (E \times \mathbb{Z}), \circ)$ є напівгрупою. Пряма перевірка показує, що одиницею

$$(W \times (E \times \mathbb{Z}), \circ) \in ((-1, 1), (1, 0)).$$

Лему доведено.

Теорема 8. [33] (а) Для будь-якого $(e, t) \in W \times (E \times \mathbb{Z})$ перетворення $\xi_{e,t}$ вільної абелевої моногенної дігрупи $(E \times \mathbb{Z}, \dashv, \vdash)$ визначене формулою

$$(a, n)_{\xi_{e,t}} = \begin{cases} (t_1, nt^+ + t_2), & \text{якщо } a = 1, \\ (e_1, (n-1)t^+ + e_2), & \text{якщо } a = -1, \end{cases} \quad (2.44)$$

є ендоморфізмом. І кожен ендоморфізм $(E \times \mathbb{Z}, \dashv, \vdash)$ має наведений вище вигляд. (б) Моноїд ендоморфізмів $End(E \times \mathbb{Z}, \dashv, \vdash)$ ізоморфний

$$(W \times (E \times \mathbb{Z}), \circ).$$

Доведення (а) безпосередньо випливає з лем 2 і 4.

Покажімо, що твердження (b) виконується.

Бієкція $\Upsilon: \text{End}(E \times \mathbb{Z}, a \dashv, \vdash) \rightarrow (W \times (E \times \mathbb{Z}), \circ)$ визначається за допомогою формули $\xi_{e,t}\Upsilon = (e, t)$ для $\forall \xi_{e,t} \in \text{End}(E \times \mathbb{Z}, \dashv, \vdash)$.

Нехай $\xi_{e,t}, \xi_{i,s} \in \text{End}(E \times \mathbb{Z}, \dashv, \vdash)$ і $(a, n) \in E \times \mathbb{Z}$, тоді маємо наступні випадки:

1) якщо $e_1 = t_1 = 1$, тоді

$$\begin{aligned} (1, n) \xi_{e,t}, \xi_{i,s} &= (1, nt^+ + t_2) \xi_{i,s} = (s_1, s_2 + (nt^+ + t_2)s^+) = \\ &= (s_1, nt^+s^+ + (t_2s^+ + s_2)) = (1, n) \xi_{(s_1, -s_1)(s_1, s_2 + t_2s^+)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1, n) \xi_{e,t}, \xi_{i,s} &= (1, (n-1)t^+ + e_2) \xi_{i,s} = (s_1, s_2 + ((n-1)t^+ + e_2)s^+) = \\ &= (s_1, (n-1)t^+s^+ + (s_2 - s^+)) = (-1, n) \xi_{(s_1, -s_1)(s_1, s_2 + t_2s^+)}. \end{aligned}$$

Таким чином, $\xi_{(1,-1),(1,t_2)} \xi_{i,s} = \xi_{(s_1, -s_1)(s_1, s_2 + t_2s^+)}$.

2) якщо $e_1 = 1, t_1 = -1$, тоді

$$\begin{aligned} (1, n) \xi_{e,t}, \xi_{i,s} &= (-1, nt^+ + t_2) \xi_{i,s} = (i_1, i_2 + (nt^+ + t_2 - 1)s^+) = \\ &= (i_1, nt^+s^+ + (t^+s^+ - i_1)) = (1, n) \xi_{(s_1, -s_1)(i_1, t^+s^+ - i_1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1, n) \xi_{e,t}, \xi_{i,s} &= (1, (n-1)t^+ + e_2) \xi_{i,s} = (s_1, ((n-1)t^+ + e_2)s^+ + s_2) = \\ &= (s_1, (n-1)t^+s^+ - s_1) = (-1, n) \xi_{(s_1, -s_1)(i_1, t^+s^+ - i_1)}. \end{aligned}$$

Таким чином, $\xi_{(1,-1),(1,t_2)} \xi_{i,s} = \xi_{(s_1, -s_1)(i_1, t^+s^+ - i_1)}$.

3) якщо $e_1 = -1, t_1 = 1$, тоді

$$\begin{aligned} (1, n) \xi_{e,t}, \xi_{i,s} &= (1, nt^+ + t_2) \xi_{i,s} = (s_1, nt^+s^+ + (t_2s^+ + s_2)) = \\ &= (1, n) \xi_{(i_1, -i_1)(s_1, t_2s^+ + s_2)}, \end{aligned}$$

$$(-1, n) \xi_{e,t}, \xi_{i,s} = (-1, (n-1)t^+ + e_2) \xi_{i,s} =$$

$$\begin{aligned}
&= (i_1, i_2 + ((n-1)t^+ + e_2 - 1)s^+) = (i_1, (n-1)t^+s^+ - i_1) = \\
&= (-1, n)\xi_{(i_1, -i_1), (s_1, t_2s^+ + s_2)}.
\end{aligned}$$

Таким чином, $\xi_{(-1,1), (1, t_2)}\xi_{i,s} = \xi_{(i_1, -i_1), (s_1, t_2s^+ + s_2)}$.

4) якщо $e_1 = t_1 = -1$, тоді

$$\begin{aligned}
(1, n)\xi_{e,t}, \xi_{i,s} &= (-1, nt^+ + t_2)\xi_{i,s} = (i_1, (nt^+ + t_2 - 1)s^+ + i_2) = \\
&= (i_1, nt^+s^+ + (t^+s^+ - i_1)) = (1, n)\xi_{(i_1, -i_1), (i_1, t^+s^+ - i_1)}, \\
(-1, n)\xi_{e,t}, \xi_{i,s} &= (-1, (n-1)t^+ + e_2)\xi_{i,s} = \\
&= (i_1, i_2 + ((n-1)t^+ + e_2 - 1)s^+) = (i_1, (n-1)t^+s^+ - i_1) = \\
&= (-1, n)\xi_{(i_1, -i_1), (i_1, t^+s^+ - i_1)}.
\end{aligned}$$

Отже, $\xi_{(-1,1), (-1, t_2)}\xi_{i,s} = \xi_{(i_1, -i_1), (i_1, t^+s^+ - i_1)}$.

Використовуючи рівності випадків 1)–4), отримуємо

$$(\xi_{e,t}, \xi_{i,s})Y = \begin{cases} ((s_1, -s_1), (s_1, t_2s^+ + s_2)), & \text{якщо } e_1 = t_1 = 1, \\ ((s_1, -s_1), (i_1, t^+s^+ - i_1)), & \text{якщо } e_1 = 1, t_1 = -1, \\ ((i_1, -i_1), (s_1, t_2s^+ + s_2)), & \text{якщо } e_1 = -1, t_1 = 1, \\ ((i_1, -i_1), (i_1, t^+s^+ - i_1)), & \text{якщо } e_1 = t_1 = -1 \end{cases}$$

для $\forall \xi_{e,t}, \xi_{i,s} \in \text{End}(E \times \mathbb{Z}, \dashv, \vdash)$.

З іншого боку,

$$\xi_{e,t}Y \circ \xi_{i,s}Y =$$

$$= \begin{cases} ((1, -1), (1, t_2)) \circ (i, s) = ((s_1, -s_1), (s_1, t_2s^+ + s_2)), & \text{якщо } e_1 = t_1 = 1, \\ ((1, -1), (-1, t_2)) \circ (i, s) = ((s_1, -s_1), (i_1, t^+s^+ - i_1)), & \text{якщо } e_1 = 1, t_1 = -1, \\ ((-1, 1), (1, t_2)) \circ (i, s) = ((i_1, -i_1), (s_1, t_2s^+ + s_2)), & \text{якщо } e_1 = -1, t_1 = 1, \\ ((-1, 1), (-1, t_2)) \circ (i, s) = ((i_1, -i_1), (i_1, t^+s^+ - i_1)), & \text{якщо } e_1 = -t_1 = -1. \end{cases}$$

Зауважимо, що група автоморфізмів вільної абелевої дігрупи $(E \times \mathbb{Z}, a \dashv, \vdash)$ складається з двох елементів, тобто $\text{Aut}(E \times \mathbb{Z}, a \dashv, \vdash) = \{\xi_{(-1,1), (1,0)}, \xi_{(-1,1), (1,0)}\}$.

Теорему доведено.

2.2.4. Вільні моногенні узагальнені дігрупи

Якщо $x_e^{-l} = x_e^{-r}$, тоді клас усіх дігруп міститься у класі всіх узагальнених дігруп, а непорожній «гало» дімоноїда (D, \dashv, \vdash) є абелевим піддімоноїдом, який є дігрупою $E(D, \dashv, \vdash)$.

Якщо дімоноїд є (узагальненою) дігрупою, то його бар-одиниці та «гало» називаються відповідно бар-одиницями та «гало» (узагальненої) дігрупи.

Якщо операції (узагальненої) дігрупи збігаються, то (узагальнена) дігрупа стає групою.

Отже, (узагальнені) дігрупи є узагальненням груп. Побудуємо вільну узагальнену дігрупу [22].

Нехай X — довільна непорожня множина і $F(X)$ — вільна група, породжена X .

Визначимо операції \dashv і \vdash на $F(X) \times X \times F(X)$:

$$(u, x, a) \dashv (v, y, b) = (u, x, avyb) \quad (2.45)$$

$$(u, x, a) \vdash (v, y, b) = (uxav, y, b) \quad (2.46)$$

для всіх $(u, x, a), (v, y, b) \in F(X) \times X \times F(X)$. $(F(X) \times X \times F(X), \dashv, \vdash)$ позначається як $FD(X)$ та $FD(X)$ — вільна моногенна узагальнена дігрупа [22].

Наступне твердження встановлює зв'язок між напівгрупами вільної узагальненої дігрупи.

Лема 17. [35] Напівгрупи $(F(X) \times X \times F(X), \dashv)$ і $(F(X) \times X \times F(X), \vdash)$ являються антиізоморфними напівгрупами.

Доведення. Визначим відображення

$$f: (F(X) \times X \times F(X), \dashv) \rightarrow (F(X) \times X \times F(X), \vdash)$$

наступним чином $(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k)f = (x_k, \dots, x_{i+2}, x_{i+1}, x_i, \dots, x_1)$

для всіх $(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k) \in (F(X) \times X \times F(X))$, де $x_i \in X, 1 \leq i \leq k$.

Безпосередня перевірка показує, що f є антиізоморфізмом. Дійсно f є бієкцією і для всіх

$$\begin{aligned}
& (x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_j, y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_m) \in \\
& \in F(X) \times X \times F(X), \text{ де } x_i, y_j \in X, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m, \text{ отримуємо} \\
& \left((x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k) \dashv (y_1, \dots, y_j, y_{j+1}, y_{j+2}, \dots, y_m) \right) f = \\
& = (x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_k y_1, \dots, y_j, \dots, y_m) f = \\
& = (y_m \dots y_j, \dots, y_1 x_k \dots x_{i+2} x_{j+1}, x_i \dots x_1) = \\
& = (y_m \dots y_{j+2}, y_{j+1}, y_j \dots y_1) \vdash (x_k \dots x_{i+2}, x_{i+1}, x_i \dots x_1) = \\
& = (y_1 \dots y_j, y_{j+1}, y_{j+2} \dots y_m) f \vdash (x_1 \dots x_i, x_{i+1}, x_{i+2} \dots x_k) f.
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Наведемо нову модель вільної моногенної узагальненої дігрупи.

Через \mathbb{Z} позначаємо множину цілих чисел. Визначимо операції \dashv і \vdash на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ за правилами:

$$(n, m) \dashv (p, s) = (n, m + p + s + 1), \quad (2.47)$$

$$(n, m) \vdash (p, s) = (n + m + p + 1, s) \quad (2.48)$$

для всіх $(n, m), (p, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Алгебру $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \dashv, \vdash)$ позначимо FD_1 .

Теорема № 9. [22]

FD_1 є вільною моногенною узагальненою дігрупою з гало

$$E(FD_1) = \{(n, m) | n + m + 1 = 0\}$$

І лівим оберненим і правим оберненими відносно бар-одиниці $(n, m) \in$

$$(p, s) \overset{l}{\underset{(n, m)}{\dashv}^1} = (n, m - s - p - 1) \text{ і } (p, s) \overset{r}{\underset{(n, m)}{\vdash}^1} = (n - s - p - 1, m),$$

де $(p, s) \in FD_1$.

Доведення. Визначимо відображення

$$\beta: FD(X) \rightarrow FD_1: (x^n, x, x^m) \rightarrow (n, m).$$

Доведемо, що β є ізоморфізмом. Для всіх $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
& ((x^{n_1}, x, x^{m_1}) \dashv (x^{n_2}, x, x^{m_2})) \beta = (x^{n_1}, x, x^{m_1+n_2+1}) \beta = \\
& = (n_1, m_1 + n_2 + m_2 + 1) = (n_1, m_1) \dashv (n_2, m_2) = (x^{n_1}, x, x^{m_1}) \beta \dashv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \neg (x^{n_2}, x, x^{m_2})\beta, \\
& ((x^{n_1}, x, x^{m_1}) \vdash (x^{n_2}, x, x^{m_2}))\beta = (x^{n_1+m_1+n_2+1}, x, x^{m_2})\beta = \\
& = (n_1 + m_1 + n_2 + 1, m_2) = (n_1, m_1) \vdash (n_2, m_2) = (x^{n_1}, x, x^{m_1})\beta \vdash \\
& \vdash ((x^{n_2}, x, x^{m_2})\beta.
\end{aligned}$$

Таким чином β є бієкцією. Отже, β – ізоморфізм, а FD_1 – вільна моногенна узагальнена дігрупа.

Згідно [35]

$$\begin{aligned}
FD(X) &= \{(x^n, x, x^m | n + m + 1 = 0\} \\
&\quad \text{і} \\
E(FD(X))\beta &= \{(n, m | n + m + 1 = 0\}. \text{ Отже,} \\
E(FD_1) &= \{n, m | n + m + 1 = 0\}.
\end{aligned}$$

Для всіх $(p, s) \in FD_1$ і $(m, n) \in E(FD_1)$ маємо, що

$$\begin{aligned}
(p, s) \vdash (p, s)_{(n, m)}^{-1} &= (p, s) \vdash (n - s - p - 1, m) = \\
&= (n, m) = (n, m - s - p - 1) \neg (p, s) = (p, s)_{(n, m)}^{-1} \neg (p, s).
\end{aligned}$$

Отже, FD_1 є вільною моногенною узагальненою дігрупою з гало та оберненими, як визначено в теоремі.

Теорему доведено.

Наслідок [35].

Нехай $(p, s) \in FD_1$ і $(n, m) \in E(FD_1)$.

Обернені $(p, s)_{(n, m)}^{-1}$ і $(p, s)_{(n, m)}^{-1}$ збігаються тоді і тільки тоді, коли $(p, s) \in E(FD_1)$. В цьому випадку $(p, s)_{(n, m)}^{-1} = (p, s)_{(n, m)}^{-1} = (n, m)$.

Якщо ρ є конгруенцією на узагальненій дігрупі (D, \neg, \vdash) такою що операції $(D, \neg, \vdash)/\rho$ збігаються, і це є група, то говорять, що ρ є груповою конгруенцією.

Якщо $\mu : D_1 \rightarrow D_2$ є гомоморфізмом узагальнених дігруп, то ядро μ позначається через $\Delta\mu$, тобто

$$\Delta\mu = \{(x, y) \in D_1 \times D_1 | x\mu = y\mu\}.$$

Лема 18. [35] Відображення

$$\omega: FD_1 \rightarrow (Z, +): (n, m) \rightarrow (n, m)\omega = n + m + 1$$

є епіморфізмом, що індукує найменшу групову конгруенцію на вільній моногенній узагальненій дігрупі FD_1 .

Доведення. Для довільних елементів $(n, m), (p, s) \in FD_1$ маємо

$$\begin{aligned} ((n, m) \dashv (p, s))\omega &= (n, m + p + s + 1)\omega = \\ &= n + m + p + s + 2 = (n + m + 1) + (p + s + 1) = (n, m)\omega + (p, s)\omega, \\ ((n, m) \vdash (p, s))\omega &= (n + m + p + 1, s)\omega = \\ &= n + m + p + s + 2 = (n + m + 1) + (p + s + 1) = (n, m)\omega + (p, s)\omega. \end{aligned}$$

Відображення ω є сюр'єктивним, оскільки для будь-якого $m \in \mathbb{Z}$ існує $(m - 1, 0) \in FD_1$ таким, що $(m - 1, 0)\omega = m$. Отже, відображення ω є епіморфізмом. Оскільки $(\mathbb{Z}, +)$ є вільною групою рангу 1, то Δ_ω є найменшою груповою конгруенцією на FD_1 .

Лемі доведено.

Узагальнену дігрупу (D, \dashv, \vdash) називають комутативною, якщо обидві напівгрупи (D, \dashv) і (D, \vdash) є комутативними.

Твердження. [35] Комутативних узагальнених дігруп з різними операціями не існує.

Доведення. Нехай (D, \dashv, \vdash) — комутативна узагальнена дігрупа, а $e \in D$ — бар-одиниця. З [17] випливає, що $x \vdash (y \dashv z) = x \vdash (y \vdash z)$ для всіх $x, y, z \in D$. Якщо $x = e$, то з останньої рівності отримуємо $y \dashv z = y \vdash z$.

Твердження доведене.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглянуто поняття дімоноїда, бар-одици дімоноїда, наведено деякі властивості дімоноїдів. Вказано, що система аксіом дімоноїда є незалежною, показано, що в класі дімоноїдів існує напівгрупової аналог теореми Келі. Охарактеризовано, найменшу сепаративну конгруенцію на

дімоноїді з комутативною операцією та найменшу сепаративну конгруенцію на вільному комутативному дімоноїді.

Розглянуто конструкцію вільного дімоноїда та охарактеризовану найменшу напівструктурну конгруенцію на ньому.

Розглянуто поняття дігрупи та узагальненої дігрупи. Наведено приклад абелевої дігрупи та сконструйовано вільну абелеву моногенну дігрупу. Для вільної абелевої дігрупи рангу 1 описано всі ендоморфізми.

Розглянуто зв'язок між напівгрупами вільної узагальненої дігрупи. Побудовано вільну моно генну узагальнену дігрупу та охарактеризовано найменшу групову конгруенцію на ній.

Показано, що не існує комутативних узагальнених дігруп з різними операціями.

ВИСНОВКИ

В даній кваліфікаційній роботі проведено дослідження історії структур алгебри від бінарних операцій до морфізмів груп дозволило побачити еволюцію математичних концепцій та їх вплив на розвиток сучасної абстрактної алгебри.

Розглянуті основні типи алгебраїчних структур такі як групи, кільця та поля демонструють важливість структурних концепцій у сучасній математиці. Ці структури збагачують наше розуміння алгебраїчних об'єктів та їх взаємодії, відіграючи ключову роль у вирішенні різних математичних завдань.

Історія алгебраїчних структур також демонструє безперервний розвиток абстракції в математиці. Перехід від конкретних операцій до абстрактних структур відкриває нові горизонти для досліджень та застосувань і дозволяє узагальнювати математичні концепції для їх ширшого застосування.

Проведений в роботі аналіз димоїдів та дігруп розкрив їх унікальні властивості та потенціал для застосування в різних галузях математики. Введення вільних моногенних дігруп представляє новий погляд на абстрактні структури алгебри.

Алгебраїчні структури, такі як групи і кільця, є важливими інструментами в сучасних математичних дослідженнях, і їх абстрактні властивості надають основи для подальших досліджень.

В кваліфікаційній роботі розглянуто поняття дімоноїда, бар-одици дімоноїда, наведено деякі властивості дімоноїдів. Вказано, що система аксіом дімоноїда є незалежною, показано, що в класі дімоноїдів існує напівгрупової аналог теореми Келі.

Охарактеризовано, найменшу сепаративну конгуренцію на дімоноїді з комутативною операцією та найменшу сепаративну конгуренцію на вільному комутативному дімоноїді.

Розглянуто конструкцію вільного дімоноїда та охарактеризовану найменшу напівструктурну конгуренцію на ньому. Розглянуто поняття

дігрупи та узагальненої дігрупи. Наведено приклад абелевої дігрупи та сконструйовано вільну абелеву моногенну дігрупу. Для вільної абелевої дігрупи рангу 1 описано всі ендоморфізми.

Вільні моногенні узагальнені дігрупи є новим класом алгебраїчних структур з потенціалом застосування в різних наукових галузях.

Розглянуто зв'язок між напівгрупами вільної узагальненої дігрупи. Побудовано вільну моногенну узагальнену дігрупу та охарактеризовано найменшу групову конгруенцію на ній. Показано, що не існує комутативних узагальнених дігруп з різними операціями.

Введення вільних моногенних узагальнених дігруп зміцнює зв'язок із поточними тенденціями в математиці та підкреслює їх потенційні застосування у сучасних галузях досліджень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авдєєва Т.В., Горбачук В.М. Алгебра. Основи алгебраїчних структур: навчальний посібник. К: НТУУ «КПІ», 2015. 79 с.
2. Бевз В.Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. – К.: НПУ імені Драгоманова, 2005. – 360с.
3. Біографічний словник діячів у галузі математики / О. І. Бородін, А. С. Бугай. — К. : Радянська школа, 1973. — 551 с.
4. Бондаренко Є.В. (2012). Теорія кілець: навчальний посібник.. К: РВЦ “Київський університет. 64 с.
5. Вілейтнер . Історія математики від Декарту до середини XIX століття пер. з нім. вид. 2 — М., 1966. — 468 с.
6. Історія математики за стародавніх часів і в середні віки: посіб. для вчителів та студ. педвишів / Г. Г. Цейтен ; передм. М. Вигодського ; пер. з рос. вид. — [Б. м.]: Радянська школа, 1936. — 220 с.
7. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах — 2-ге видання. — К.: Центр учбової літератури, 2009. с.162. — 594 с.
8. Нариси з історії математики: навч. посіб. / М. П. Ленюк. — Чернівці: Прут, 2010. — 359 с.
9. Практикум з історії математики / В. Г. Бевз ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. — Київ, 2004. — 311 с.
10. Требенко Д. Я., Требенко О. О. Алгебра і теорія чисел: У 2 ч. — Ч.1. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2009. 420 с.
11. Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука : 19-21 квітня, 2012 р., м. Київ: матеріали конференції / Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Нац. техн. ун-т України «Київський політехнічний інститут»; — К. : НТУУ «КПІ», Т. 4 : Історія та методика викладання математики. — 2012. — 299 с.
12. Felipe R. Digroups and their linear presentations. East-West J. Math. 2006, 8 (1), 27–48.

13. Felipe R. Generalized Loday Algebras and Digroups. Comunicaciones del CIMAT, 2004, No. I-04-01/21-01-2004.
14. Givens B.N., Rosin A., Linton K. Interassociates of the bicyclic semigroup. Semigroup Forum 2017, 94, 104–122. doi:10.1007/s00233-016-9794-9.
15. Hickey J.B. On variants of a semigroup. Bull. Aust. Math. Soc. 1986, 34 (3), 447–459.
16. Kinyon M.K., Leibniz algebras, Lie racks, and digroups. J. Lie Theory 2007, 17 (1), 99–114.
17. Liu K. The generalizations of groups. Research Monographs in Math. Publishing: Burnaby. 2004, 1, 153.
18. Liu K. Transformation digroups. arXiv:math/0409265.
19. Loday J.-L., Dialgebras, in: Dialgebras and related operads, Lect. Notes Math., 1763 (2001) SpringerVerlag, Berlin, 7–66.
20. Matematyka i jej historia / W. Wiesław. — Opole: NOWIK, 1997. — 416 s.
21. Phillips J.D., A short basis for the variety of digroups, Semigroup Forum, 70 (2005), 466–470. 21–27.
22. Rodr'iguez-Nieto J.G., Salazar-D'iaz O.P., Velasquez R. ' Abelian and symmetric generalized digroups. Semigroup Forum 2021, 102, 861–884.
23. Rodr'iguez-Nieto J.G., Salazar-D'iaz O.P., Velasquez R. ' Augmented, free and tensor generalized digroups. Open Math. 2019, 17 (1), 71–88. doi:10.1515/math-2019-0010
24. Salazar-D'iaz O.P., Velasquez R., Wills-Toro L.A. ' Generalized digroups. Comm. Algebra 2016, 44 (7), 2760–2785. doi:10.1080/00927872.2015.1065841
25. Yu. V. Zhuchok, G. F. Pilz. A new model of the free monogenic digroup, Mat. Stud. 59 (2023), 12–19. doi:10.30970/ms.59.1.12-19
26. Zhang G., Chen Y. A construction of the free digroup. Semigroup Forum 2021, 102, 553–567. doi:10.1007/s00233- 021-10161-6

27. Zhuchok A.V. Commutative dimonoids, Algebra and Discrete Mathematics, N.2, 2009, pp.116-127. / 103
28. Zhuchok A.V. Relatively free dimonoids and bar-units. Internat. J. Algebra Comput. 2021, 31 (08), 1587–1599. doi:10.1142/S0218196721500570.
29. Zhuchok A.V. Structure of relatively free dimonoids. Comm. Algebra 2017, 45 (4), 1639–1656. doi: 10.1080/00927872.2016.1222404
30. Zhuchok A.V., Dimonoids, Algebra and Logic, 50 (2011), №4, 323–340.
31. Zhuchok A.V., Free commutative dimonoids, Algebra and Discrete Mathematics, 9 (2010), №1, 109–119.
32. Zhuchok A.V., Zhuchok Y.V. On two classes of digroups. Sao Paulo J. Math. Sci. 2017, ~ 11 (1), 240–252. doi:10.1007/s40863-016-0038-4
33. Zhuchok Y.V. Endomorphisms of free abelian monogenic digroups. Matematychni Studii. 2015, 43 (2), 144–152. doi:10.15330/ms.43.2.144-152
34. Zhuchok Y.V. Free abelian dimonoids. Algebra Discrete Math. 2015, 20 (2), 330–342.
35. Zhuchok, A.V., Pilz, G.F. New models for some free algebras of small ranks. Carpathian Mathematical Publications, 2023, 15(1), pp. 295–305 / 100